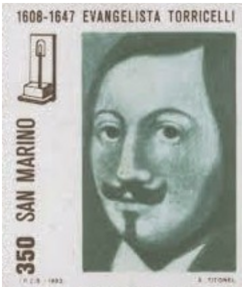
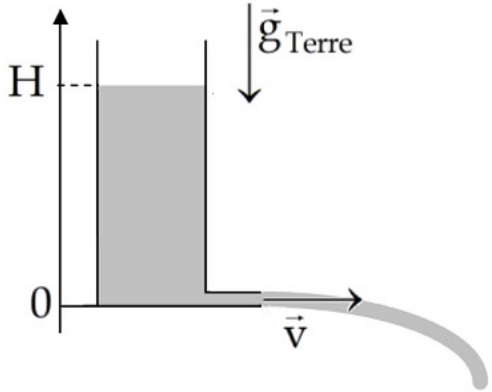
.Vidange d'un fluide.

On s'intéresse ici à la vidange d'un récipient contenant un fluide dont on idéalisera la nature ainsi que celle de son écoulement.

Le principe de Torricelli est un principe de mécanique des fluides découvert par Evangelista Torricelli en 1643.



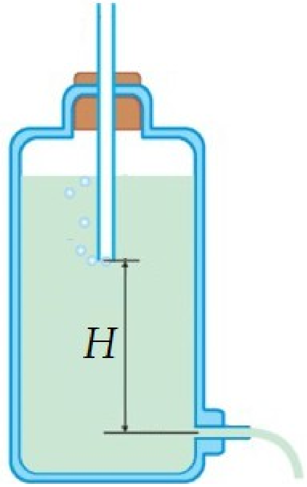
Il établit que le carré de la vitesse d'écoulement d'un fluide sous l'effet de la pesanteur est proportionnel à la hauteur de fluide située au-dessus de l'ouverture par laquelle il s'échappe du récipient qui le contient.



$$\longrightarrow \boxed{v = \sqrt{2g_{Terre}.H}}$$

I. Expérience.

Pour une certaine hauteur d'eau « H », relevez la masse d'eau « M_{Eau} » vidangée sur une durée « Δt ».



La présence de la tige creuse permet de travailler à hauteur H constante, tant que la surface libre n'est pas descendue sous le niveau de celle-ci .

$H_{\text{en cm}}$	Δt	M_{Eau}
5		
10		
15		
20		
25		
30		

L'exploitation des données numériques se fera en utilisant les unités du système officiel : m, kg, s etc ...

a. Déterminez le volume vidangé ainsi que la valeur prise par le débit volumique lors de chaque vidange.

On rappelle que le débit volumique d'un fluide animé d'une vitesse « v »

au travers d'une surface « S » est : $\boxed{D_{volum.} = v.S}$

b. Déduire du débit volumique la vitesse « v » du fluide en sortie du vase. *La section de sortie du tube présente un diamètre de 3,75 mm.*

c. Par exploitation graphique des couples de valeurs (v ; H), contrôler la validité de la formule de Torricelli.

On rappelle que $\rho_{Eau} = 10^{3}\ kg.m^{-3}$

→ <u>Mesures, Paramètres & expressions</u>.

Travaux Pratiques : vidange d'un fluide

Paramètres | Tableau | Expressions | MathPlayer | Python

Trier | Ajouter | Sup. colonne | Sup. ligne | Incertitudes | Ajouter page

i	H	Δt	Meau	Veau	Debitvolumi	vitesse	vcarre
	m	s	kg	m^3	$m^3.s^{-1}$	m/s	$m^2.s^{-2}$
0	0,025000	90,0000	0,535000	0,000535	$5{,}94444\cdot10^{-6}$	0,538219	0,289679
1	0,050000	67,0000	0,603000	0,000603	$9{,}00000\cdot10^{-6}$	0,814873	0,664019
2	0,075000	59,0000	0,784000	0,000784	$1{,}32881\cdot10^{-5}$	1,20313	1,44752
3	0,100000	54,5000	0,837000	0,000837	$1{,}53578\cdot10^{-5}$	1,39052	1,93354
4	0,125000	39,0000	0,743000	0,000743	$1{,}90513\cdot10^{-5}$	1,72493	2,97539
5	0,150000	44,0000	0,741000	0,000741	$1{,}68409\cdot10^{-5}$	1,52480	2,32502
6	0,200000	30,4000	0,729000	0,000729	$2{,}39803\cdot10^{-5}$	2,17121	4,71415
7	0,250000	16,2000	0,459000	0,000459	$2{,}83333\cdot10^{-5}$	2,56534	6,58098

Travaux Pratiques : vidange d'un fluide

Paramètres | Tableau | Expressions | MathPlayer | Python

Ajouter | Syntaxe | Mise à jour | Imprimer | Copier | Degré | Préfixe

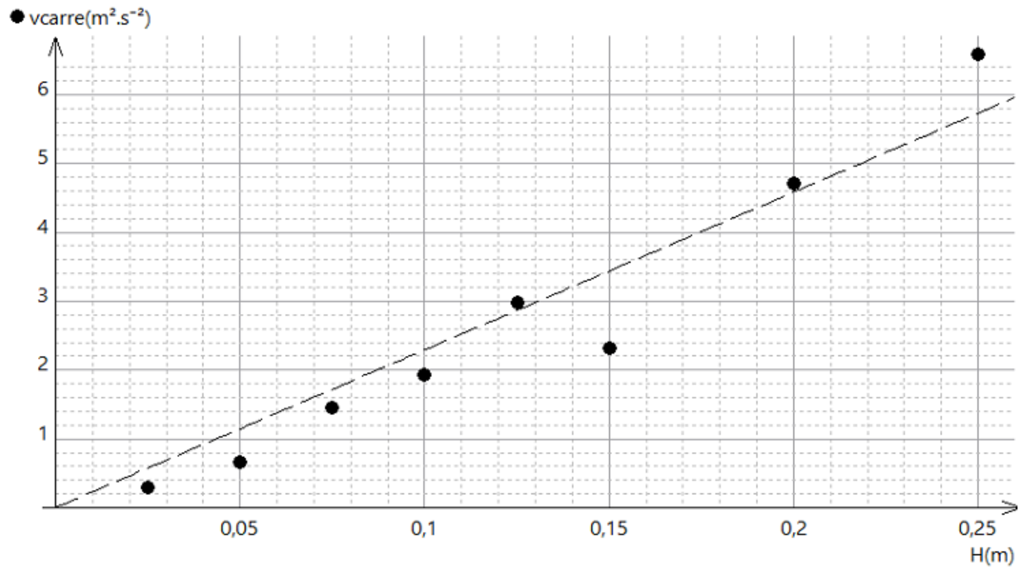
Constantes
Statistique
Classiques | Signal
Autres | Programme
Grandeurs | Grec

+ − X / ( ) ^ =

i
Npoints
[i]
[i+1]
[i-1]
H
Δt
Meau
peau
Veau
Debitvolumique
Φsortie
Ssortie
vitesse
vcarre

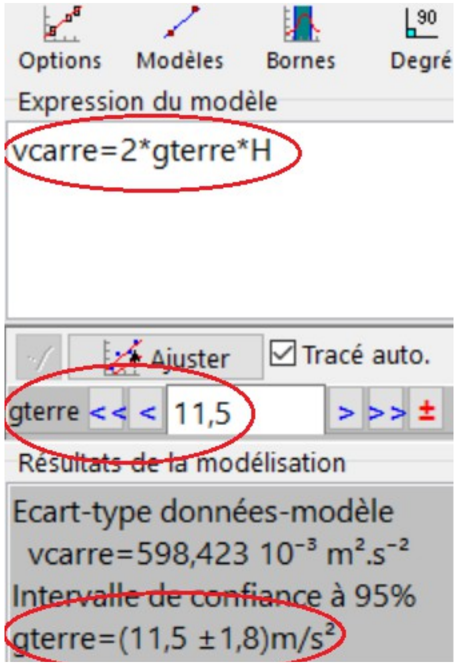
```
'le tiret bas _ permet d'assigner à une valeur numérique une dimension.
'la lettre m portée directement après une valeur numérique correspond
'au préfixe milli

'Déclaration de masse volumique de l'eau
peau=1000_kg*m^-3

'calcul du volume vidangé et du débit volumique
Veau=Meau/peau_m^3
Debitvolumique=Veau/Δt

'déclaration du diamètre de sortie et calcul de surface de sortie
Φsortie=3.75m_m
Ssortie=π*(Φsortie/2)^2_m^2

'Calcul de vitesse de sortie
vitesse=Debitvolumique/Ssortie

'calcul du carré de la vitesse de sortie
vcarre=vitesse^2
```

→ *<u>graphique & modélisation</u>*.



Les points expérimentaux sont un peu dispersés autour d'une droite moyenne dont le coefficient directeur est d'un ordre de grandeur satisfaisant.

La valeur de g_{Terre} associée présentant un écart d'environ 15 % à celle théorique.



II. Etude théorique.

On cherche ici à établir la formule de Torricelli. *Cf introduction.*

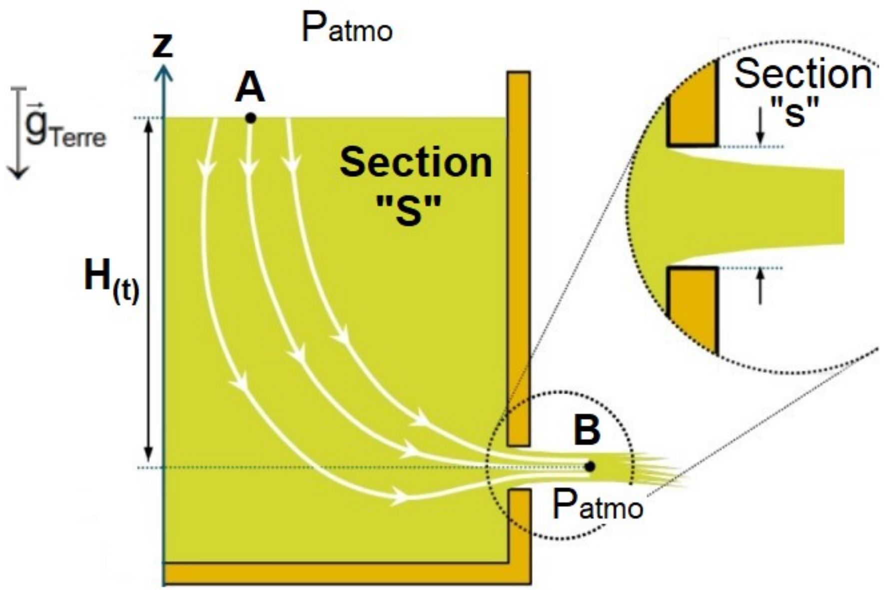
On rappelle que l'écoulement permanent d'un fluide incompressible satisfait à la relation de Bernoulli :

$$\boxed{\begin{array}{l}\rho.\frac{v^2}{2}+\rho.g_{Terre}.z+P = \text{Constante} \\ \text{en tout point de l'écoulement}\end{array}}$$

Daniel Bernoulli

→ https://fr.wikipedia.org/wiki/Daniel_Bernoulli

On schématise la situation ci -dessous.



a. Appliquez la relation de Bernoulli pour les points A et B.

$$\rho.\frac{v^2}{2}+\rho.g_{Terre}.z+P = \text{Constante en tout point de l'écoulement}$$

$$\text{Soit : } \rho.\frac{v_A^2}{2}+\rho.g_{Terre}.z_A+P_A = \rho.\frac{v_B^2}{2}+\rho.g_{Terre}.z_B+P_B$$

$$\text{avec } P_A = P_B = P_{atmo} \text{ et } z_A - z_B = H$$

$$\text{D'où : } \frac{\rho}{2}\left(v_B^2 - v_A^2\right) = \rho.g_{Terre}.H \longrightarrow \boxed{\left(v_B^2 - v_A^2\right) = 2.g_{Terre}.H}$$

b. Appliquez la conservation du débit volumique entre les points A et B.

Selon les notations adoptées, la consevation du débit volumique entraîne que :

$$\boxed{S.v_A = s.v_B} \text{ ou encore que : } \boxed{\frac{v_B}{v_A} = \frac{S}{s}}$$

On fait l'hypothèse que la section de l'orifice de sortie est très inférieure à celle du cylindre : s << S.

c. En déduire une inégalité sur les vitesses d'écoulement du fluide aux points A et B.

$$\text{Si } s << S, \text{ alors : } \frac{v_B}{v_A} = \frac{S}{s} >> 1.$$

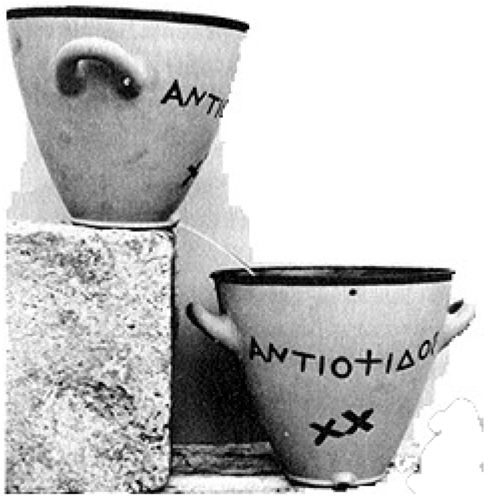
$$\text{On peut considérer que : } \boxed{v_A << v_B}$$

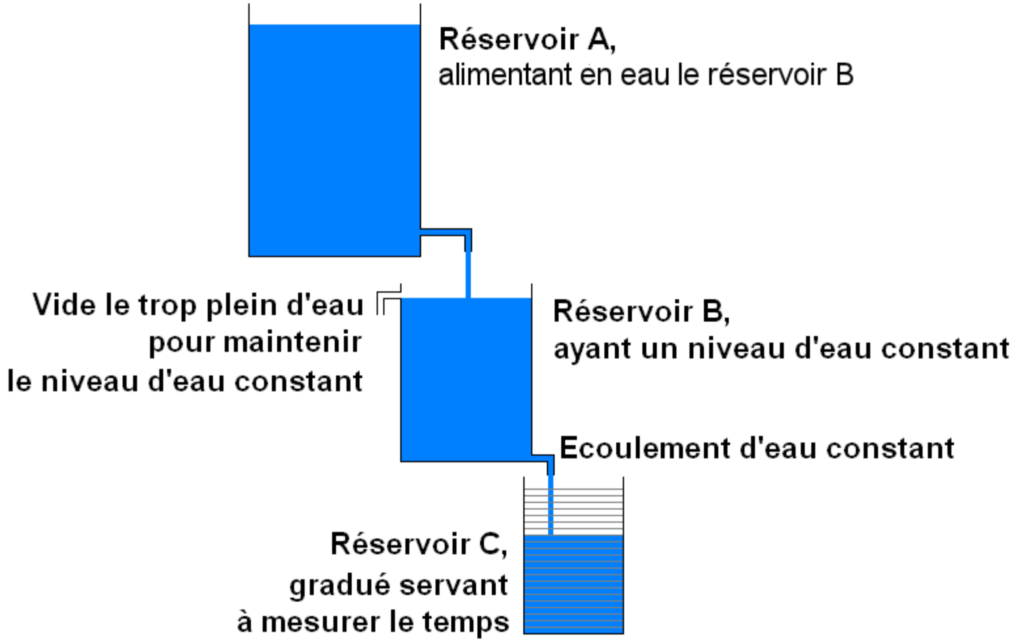
d. A partir des questions précédentes, établir la formule de Torricelli.

$$\begin{cases}\left(v_B^2 - v_A^2\right) = 2.g_{Terre}.H \\ v_A << v_B\end{cases} \longrightarrow \boxed{v_B^2 = \sqrt{2.g_{Terre}.H}}$$

Il existe plusieurs possibilités pour assurer un débit de fluide constant.

Soit en ayant toujours une hauteur H de liquide constante dans le récipient d'où s'écoule le fluide, avec par exemple une alimentation à débordement

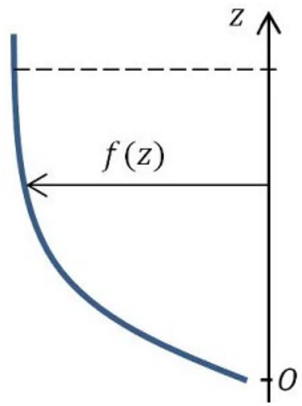




Ou en donnant au récipient une forme évasée adéquate permettant un écoulement à débit constant.

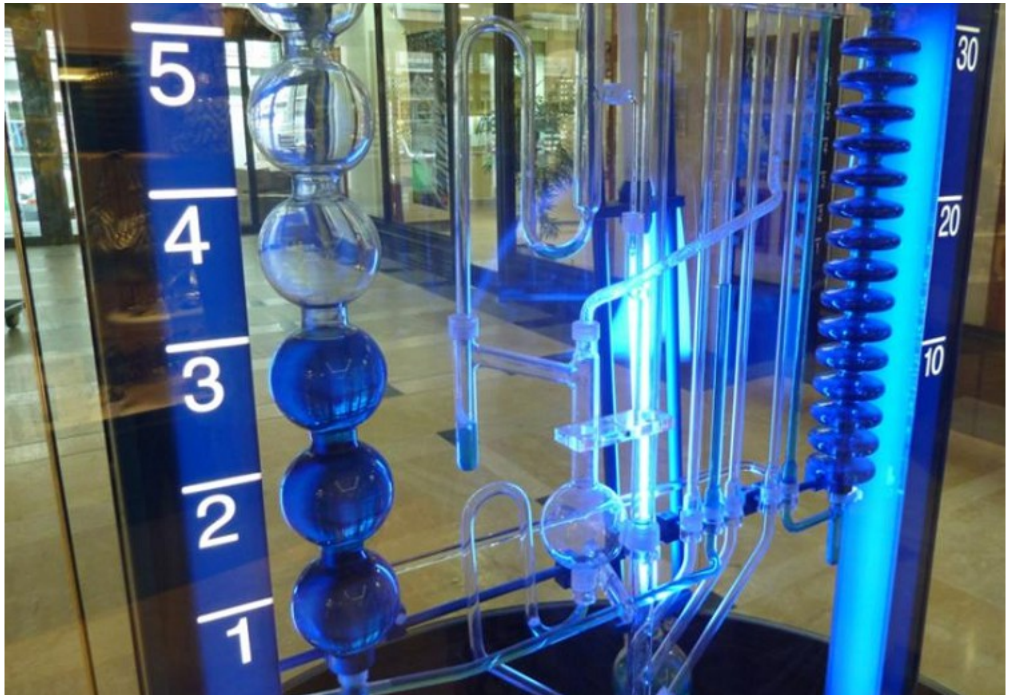
Ce qui sera effectué dès l'Égypte antique mais théorisé que bien plus tard.

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = -\sqrt{2gz} \cdot \frac{Cste}{f(z)^2}}$$



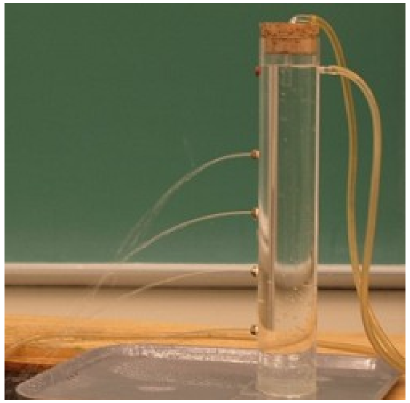
On attribue le concept d'horloge (à eau) à Ctésibios d'Alexandrie (III ème siècle avant JC).

Il serait le premier à avoir élaborer un mécanisme indirect d'indication horaire basé sur l'écoulement régulé d'un fluide

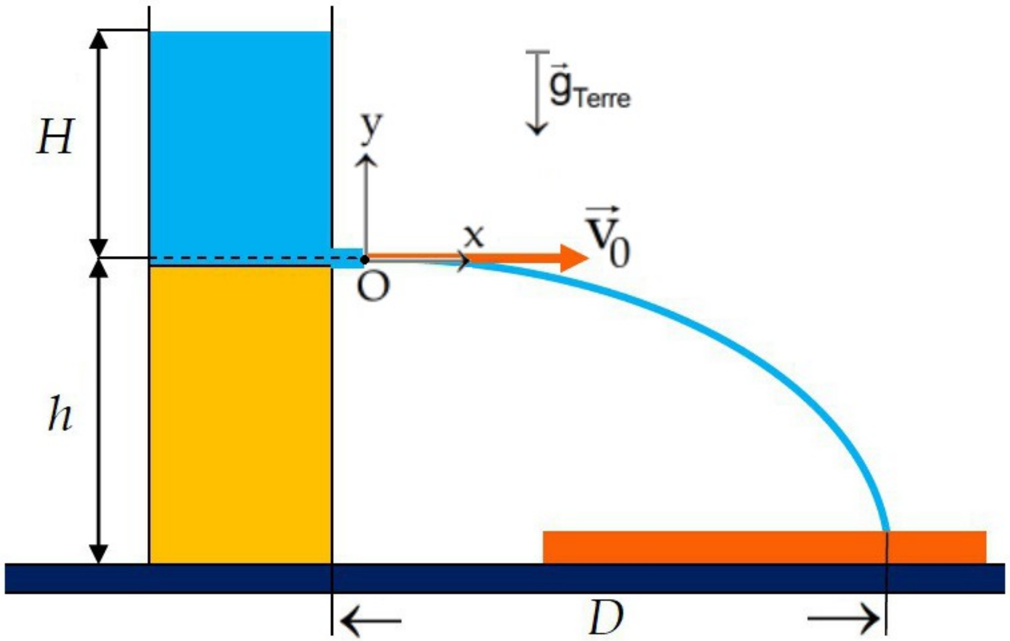


III. Exercice.

→ On s'intéresse ici aux variations de la portée du jet en fonction de la hauteur d'eau dans le récipient.



On adopte les notations du schéma ci-dessous :



On étudie le système {goutte d'eau}. C'est à dire une goutte du jet de liquide.

L'étude est mené dans le référentiel terrestre supposé galiléen..

a. A l'aide d'une relation que l'on énoncera, établir l'expression de l'accélération du système.

On applique au système étudié la seconde loi de Newton dans le référentiel terrestre galiléen :

$$\sum \vec{F}_{ext\to syst} = \frac{d\vec{p}_{syst}}{dt}.$$

$$\text{Ici : } \begin{cases} \sum \vec{F}_{ext\to syst} = \overrightarrow{Poids}_{syst} \\ \dfrac{d\vec{p}_{syst}}{dt} = m_{syst}.\vec{a}_{syst(t)} \end{cases} \longrightarrow \vec{a}_{syst(t)} = \boxed{\vec{a}_{syst} = \vec{g}_{Terre}}$$

b. Etablir les équations horaires du mouvement du système étudié.

$$\vec{v}_{(t)} \begin{cases} v_{x(t)} = v_0 \\ v_{y(t)} = -g_{Terre}.t \end{cases} \qquad \overrightarrow{OM} \begin{cases} x_{(t)} = v_0.t \\ y_{(t)} = -\dfrac{1}{2}.g_{Terre}.t^2 \end{cases}$$

par "intégrations successives" car $\vec{a}_{(t)} = \dfrac{d\vec{v}_{(t)}}{dt}$ et $\vec{v}_{(t)} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$

et selon les conditions initiales $\vec{v}_0 \begin{cases} v_0.\vec{u}_x \\ 0.\vec{u}_y \end{cases}$ et $\overrightarrow{OM}_0 \begin{cases} 0.\vec{u}_x \\ 0.\vec{u}_y \end{cases}$,

on obtient :

$$\boxed{\vec{v}_{(t)} \begin{cases} v_{x(t)} = v_0 \\ v_{y(t)} = -g_{Terre}.t \end{cases} \qquad \overrightarrow{OM} \begin{cases} x_{(t)} = v_0.t \\ y_{(t)} = -\dfrac{1}{2}.g_{Terre}.t^2 \end{cases}}$$

c. En s'intéressant aux coordonnées du point de chute de la goutte dans le récipient établir que : $\boxed{D^2 = \dfrac{2h.(v_0)^2}{g_{Terre}}}$

Les coordonnées du point M_{chute} sont : $M_{chute}(D;-h)$.

Elles vérifient : $\overrightarrow{OM}_{chute} \begin{cases} D = v_0.t_{chute} \\ -h = -\dfrac{1}{2}.g_{Terre}.(t_{chute})^2 \end{cases}$.

"t_{chute}" étant l'instant correspondant au point M_{chute}

On en déduit que : $\begin{cases} D = v_0.t_{chute} \rightarrow t_{chute} = \dfrac{D}{v_0} \\ -h = -\dfrac{1}{2}.g_{Terre}.(t_{chute})^2 \rightarrow -h = -\dfrac{1}{2}.g_{Terre}.\left(\dfrac{D}{v_0}\right)^2 \end{cases}$.

D'où : $\boxed{D^2 = \dfrac{2h.(v_0)^2}{g_{Terre}}}$

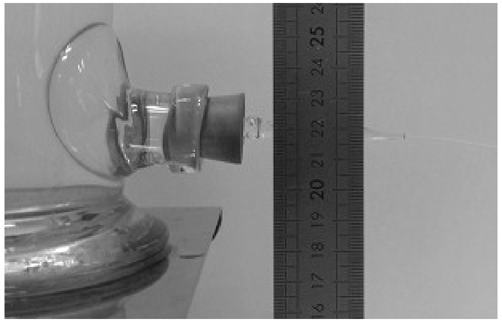
d. Déduire des deux relations précédentes que :

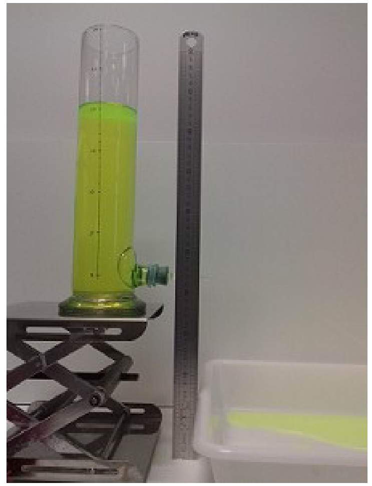
$$\boxed{D^2 = 4.h.H}$$

On a : $\begin{cases} D^2 = \dfrac{2h.(v_0)^2}{g_{Terre}} \\ v_0 = \sqrt{2g_{Terre}.H} \end{cases} \longrightarrow D^2 = \dfrac{2h.\left(\sqrt{2g_{Terre}.H}\right)^2}{g_{Terre}} \longrightarrow \boxed{D^2 = 4.h.H}$

✗ *Expérience.*

On utilise le montage ci-contre.
La hauteur initiale du jet est h = 21,5 cm.





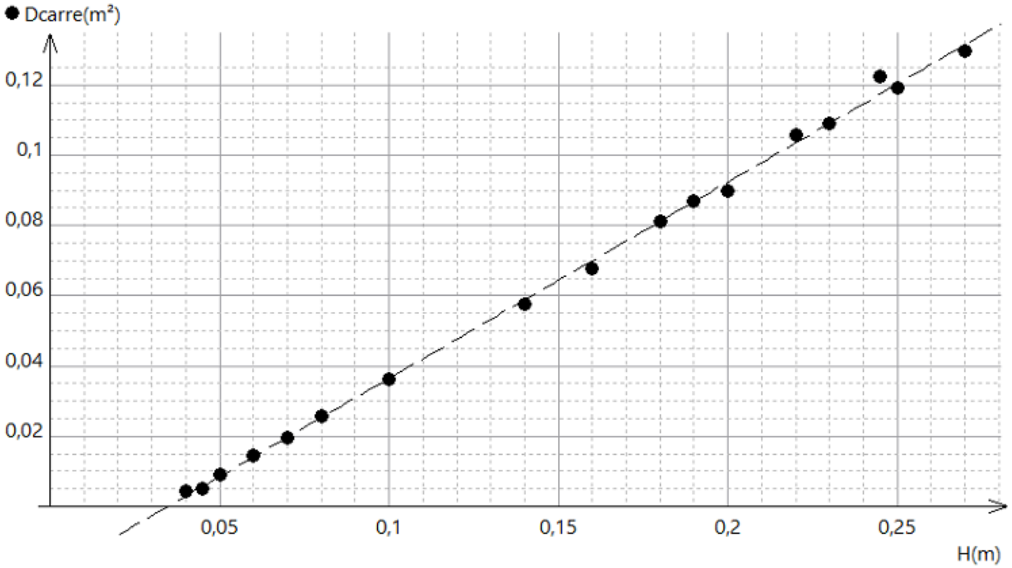
On relève expérimentalement la portée D du jet pour différentes valeurs de hauteur d'eau H.

$H_{en\ cm}$	4	4,5	5	6	7	8	10	14
$D_{en\ cm}$	6,5	7	9,5	12	14	16	19	24

$H_{en\ cm}$	16	18	19	20	22	23	25
$D_{en\ cm}$	26	28,5	29,5	30	32,5	33	34,5

e. Par exploitation graphique des mesures expérimentales, effectuez un contrôle de la relation établie au **d.**

Etant donné la relation établie précédemment, on tracera les variations du carré de la distance D en fonction de celles de la hauteur d'eau H.



Les points obtenus ont l'air de suivre une loi affine plutôt que linéaire *(erreur systématique ?).*

La valeur de « h » obtenue relève d'un ordre de grandeur correct, sans plus.

Néanmoins, l'allure générale de la courbe obtenue est plutôt satisfaisant.