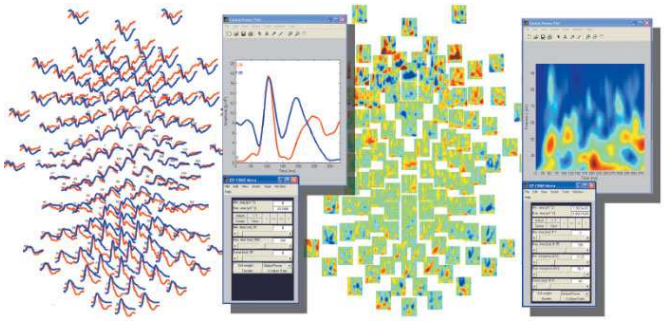
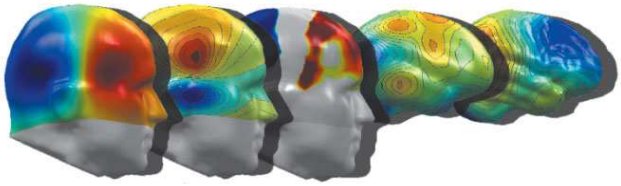
Institut National des Sciences Appliquées
Centre Val de Loire - Blois - Bourges
Département Génie des Systèmes Industriels

COURS DE

TRAITEMENT DU SIGNAL

Signaux Déterministes (TS1) et Signaux Aléatoires (TS2)





Serge DOS SANTOS
Maître de Conférences, HDR

Ce support de cours est disponible sur le site de l'Université François Rabelais de Tours à l'adresse suivante :

http://www.univ-tours.fr/m-dos-santos-serge-204687.kjsp?RH=ACCUEIL_FR

https://sites.google.com/site/sfagispages/cours_TS_2016_GSI_INSACVL.pdf

et sur le site de l'INSA Centre Val de Loire à l'adresse suivante :

https://celene.insa-cvl.fr/pluginfile.php/2200/mod_resource/content/1/cours_TS_2016_GSI_INSACVL.pdf

Quelques remerciements à Camille Charbonnier de l'Université de Rouen (CHU Rouen) pour avoir intégré quelques notions de ce support de cours dans sa pédagogie :

https://camillecharbonnier.files.wordpress.com/2013/02/slides.pdf

Description de l'enseignement de Traitement du Signal - Année 2015-2016

Présentation L'Élément Constitutif (EC) "Traitement du signal 1 (TS1)" fait partie de l'Unité d'Enseignement (UE) "Génie Électrique 6" de la 3ème année du département Génie des Systèmes Industriels (GSI). L'enseignement est dispensé en 3ème année au cours du deuxième semestre, et concerne la partie "Signaux Déterministes". L'Élément Constitutif (EC) "Traitement du signal 2 (TS2)" fait partie de l'Unité d'Enseignement (UE) "Génie Électrique 8" de la 4ème année du département Génie des Systèmes Industriels (GSI). L'enseignement est dispensé en 4ème année au cours du premier semestre, et concerne la partie "Signaux Aléatoires". Les enseignements sont dispensés par :

- Serge DOS SANTOS (SDS) - (Responsable de l'EC), Maître de Conférences (HDR) à l'INSA Centre Val de Loire, Membre du bureau exécutif de l'Académie Internationale de Contrôle Non Destructif, Chercheur au sein de l'U390 Inserm "Imagerie et Cerveau", Bureau D04, Email : , serge.dossantos@insa-cvl.fr
- Marouen STA (MS) - Doctorant à l'Inserm, Email : marouen.sta@etu.univ-tours.fr
- Martin Lints (ML) : Doctorant à l'Inserm et à l'Université de Tallinn ; martin.lints@insa-cvl.fr

Contenu de l'enseignement Compte tenu du faible nombre d'heures consacré à cet enseignement, seule une **introduction** au Traitement du Signal Déterministe (TS1) et Aléatoire (TS2) sera proposée.

L'enseignement TS1 comprend

- 8 heures de cours "signaux déterministes" (SDS)
- 10 heures de TD "signaux déterministes" (Exercises could be given in English) dont 4 sous Matlab (SDS, MS, ML)
- 4 heures de TP (salle D01)(Practical projects could be given in English) "Mesures temporelles et spectrales des signaux" (SDS, VJ)

Modalité d'évaluation (TS1 et TS2) - Multi-échelles "70/30"

♣ Compte-rendus des TD : ramassés à la fin de la séance. Les groupes seront constitués d'au plus 3 élèves. Sur les 5 TD, 1 sera noté, affecté d'un coefficient 5 (sur 21) pour le calcul de la note finale de l'EP.

♡ Compte-rendus du TP : ramassés à la fin de la séance, notés et affectés d'un coefficient 3 (sur 21) pour le calcul de la note finale de l'EP.

♠ L'examen final (2 heures) : affecté d'un coefficient 13 (sur 21) pour le calcul de la note finale de l'EP. Les documents autorisés seront : Feuille A4 recto verso avec notes personnelles, formules et résultats (photocopies formellement interdites). Traditionnellement, environ 70% du sujet est constitué d'exercices déjà proposés (TD, TP, annales), et 30% d'exercices jamais traités (règle du "70-30").

Avertissements La plupart des parties de ce polycopié est difficilement compréhensibles sans le complément donné en cours magistral

Remerciements Quelques parties de ce polycopié s'inspirent des cours de J.L. Vaterkowski (ENSMM), Michel Remoissenet (Université de Bourgogne), et des ouvrages cités en référence.

Signal processing -Course Description - Year 2015-2016
(part of the lecture could be given in English)

Presentation The objective of the courses in signal processing is to provide the student with significant skills in general as well as advanced theories and methods for modification, analysis, detection and classification of analog signals.

The teaching in signal processing is strongly related to a broad range of engineering applications where signal processing systems constitute as a part of the total solution. Since signals can have their origins in electrical, mechanical, biological, optical or acoustical systems, the educational program in signal processing typically gives the student experience in theories and methods for handling signals with a wide variety of distribution in time and frequency. The objective of this course is that the students will achieve deep knowledge in modeling different multi media signals using methods based upon signal theory. These lectures are given by :

- Serge DOS SANTOS (SDS) - Associate Professor (responsible of the course), Room C16, Email : serge.dossantos@insa-cvl.fr

Course plan The course starts the second semester in week 7, and will finish with the final exam.

Courses are

- Lectures (8 hours) "Deterministic Signals" (SDS)
- Exercises (Exercices could be given in English) (10 hours) "Deterministic Signals" where 4 are with Matlab (SDS)
- Practical Projects (Practical projects could be given in English)(4 hours) (room D01) "Time and Frequency Analysis of signals" (SDS)

Examination The examination is assessed as an written exam (2 hours). In order to get a satisfactory course, each part is weighted as follows :

♣ theoretical exercises : 5/21
♡ Practical projects 3/21
♠ final exam (2 hours) 13/21

Offre d'emploi (Le Monde 26 juin 2007)

Côte d'Azur

Nous sommes le laboratoire R&D d'un important groupe multinational leader dans son secteur. Plus de 55 000 personnes à travers le monde contribuent au développement de notre groupe. Notre challenge est d'anticiper les besoins futurs. Pour répondre aux nouveaux défis technologiques nous recherchons un(e) :

Ingénieur Traitement du Signal (h/f)

Vous avez au moins 4 ans d'expérience en R&D traitement du signal avec de solides connaissances dans plusieurs de ces domaines : filtrage adaptatif, fusion de capteurs, systèmes non-linéaires, analyse temps-fréquence, réduction de bruit, séparation de sources, réjection d'interférences, estimation de paramètres.
La maîtrise de MATLAB et des langages C ou C++ est indispensable.
La connaissance de capteurs piézo-électriques serait un plus.
Passionné par la recherche, vous êtes à l'aise dans les échanges multiculturels et maîtrisez l'anglais

Merci d'envoyer CV + lettre de motivation à notre Conseil qui traitera votre dossier en toute confidentialité. C I D Ressources Humaines, 63 avenue Cyrille-Besset, 06100 Nice.
Tél. : 04 93 52 52 98 - e-mail : cid.rh@club-internet.fr

CID Ressources Humaines

Publicis Consultants | RH

Offre d'emploi (http://tbe.taleo.net le 3 janvier 2011)

CGGVERITAS

Home > Careers > Search Results

Career Opportunities

Stage Analyse de données sismiques 4D Terrestre H/F

Location: **France - Massy**

Description

CGGVeritas is the world's leading international pure-play geophysical company delivering a wide range of technologies, services and equipment to its broad base of customers throughout the global oil and gas industry. With increasing operational capabilities as a result of its new technology and innovative methods.

Stage "Analyse de données sismiques 4D Terrestre"

Stage rémunéré de 4 à 6 mois, situé à Massy

JOB SUMMARY

Dans le cadre de la sismique 4D, CGGVeritas développe une nouvelle méthode de surveillance des réservoirs/stockages souterrains. La technique est basée sur l'utilisation d'un réseau permanent de mini sources sismiques et de capteurs enterrés. En se plaçant sous la zone altérée de proche surface, on obtient une excellente précision dans l'acquisition sismique terrestre répétée (4D). Des données 3D on été acquises en continue pendant une période de 3 mois sur un site en production au Canada. Le traitement de ces données a fournit des résultats en accord avec le scénario d'injection/production et nous a permis de construire « le film » des variations de certains attributs physiques qui caractérisent le réservoir (temps de trajets, amplitudes des ondes).

KEY JOB RESPONSIBILITIES

Durant son stage, l'étudiant(e) testera la sensibilité des différents paramètres du traitement 4D appliqué :

- Influence des paramètres de la fonction de cross-corrélation 4D (fenêtres en temps, diamètre de lissage, résultats par source, influence de la bande de fréquence, etc)
- Amélioration du rapport Signal sur Bruit par application d'une nouvelle méthode « antibruit de pompes » aux données brutes enregistrées sur le terrain.
- Application de la séquence de traitement 4D à ces données dé-bruitées et comparaison des résultats.

Les traitements seront réalisés en utilisant Matlab et notre bibliothèque « maison » de routines de calcul. L'étudiant(e) sera encadré(e) par l'équipe 4D-Land en interaction avec l'équipe R&D.

JOB REQUIREMENTS

Nous recherchons un étudiant en master 2, d'une école d'ingénieur avec de bonnes connaissances en Géophysique, en traitement du signal. La connaissance de Matlab serait la bienvenue.

Our focus on performance and passion for innovation are powered by people and delivered with integrity

Offre d'emploi (http://www.thalesgroup.com/ le 22 octobre 2012)

22/10/12 Stage: Ingénierie traitement du signal

Thales
CarrièresDécouvrez notre GroupeTravaillez avec NousTémoignages
main navigation

Stage: Ingénierie traitement du signal - 1213343

Stage - Plein temps
Famille professionnelle 04 - R&D : Ingénierie Systèmes & Etudes Générales
Localisation principale FR-Centre/Poitou-Charente-Orléans
Organisation Thales France

Date d'affichage 18 oct. 2012
Date de fin de publication Non spécifiée

Présent dans 50 pays et employant 68 000 collaborateurs, **Thales** est leader mondial des Systèmes d'information critiques sur les marchés de l'Aéronautique et de l'Espace, de la Défense et de la Sécurité.

Au sein de la **Division Opérations Aériennes**, la **Business Line Surface Radar (SRA)** conçoit, développe et fournit une gamme de produits radars de surface qui est la plus complète du marché. Elle répond aux besoins de surveillance du ciel et de zones sensibles, tant dans les domaines civils (radars civils) que militaires (surveillance côtière, champ de bataille et contrebatteries...). La conception et la fabrication de ces radars sont réalisées au sein de nos quatre centres d'excellence : trois en France pour les applications terrestres et civiles, un au Pays Bas pour les activités navales.

SRA recherche un(e) :

Stage: Ingénierie traitement du signal - H/F
Poste basé à Fleury-Orléans (45)

Vous rejoignez le Service Soutien et Support client et plus particulièrement l'équipe chargée de l'ingénierie systeme. Vous serez rattaché au responsable de cette équipe.

Deux stages possibles:

Première mission :
Prototypage de la fonction BUS pour réaliser la liaison de données entre les informations des émetteurs récepteurs radar et des interfaces hommes-machines. Il s'agit de tester des nouvelles fonctionnalités sur un radar fonctionnalités sur un radar en utilisant les logiciels MATLAB.

Deuxième mission:
Prototypage d'un réception d'ondes radar 60 MHz (fréquence intermédiaire) à partir d'un banc de réception radar, en utilisant le logiciel LABVIEW.

Chaque stage fera l'objet d'une démonstration de faisabilité de concept et de la production d'une maquette de faisabilité.

Vous êtes en dernière année d'école d'ingénieur avec une spécialisation en traitement du signal ou en hyperfréquence.
Vous connaissez les langages LABVIEW ou MATLAB.
Vous maitrisez les outils informatiques.

Table des matières

I Introduction à la Théorie du Signal 15

1 Quelques définitions 17
- 1.1 Définitions de base . . . 17
- 1.2 Classification des signaux . . . 19
- 1.3 Interpretation des signaux . . . 21

II Signaux Déterministes 23

2 Théorie des distributions 25
- 2.1 Position du problème . . . 25
  - 2.1.1 Problème de la charge ponctuelle . . . 25
  - 2.1.2 Problème de la charge d'un condensateur . . . 26
- 2.2 Les distributions . . . 28
  - 2.2.1 Propriétés essentielles des distributions . . . 28
  - 2.2.2 Convolution des distributions . . . 30
- 2.3 Transformations de Laplace et Fourier des distributions . . . 32
  - 2.3.1 Transformations de Laplace . . . 32
  - 2.3.2 Transformations de Fourier (TF) des distributions . . . 32

3 Les signaux certains ou déterministes 39
- 3.1 Introduction . . . 39
- 3.2 Définitions-Exemples . . . 40
- 3.3 Espace de Hilbert des signaux . . . 40
- 3.4 Bases continues . . . 40
- 3.5 Egalité de Parseval-Plancherel . . . 41

4 Propriétés énergétiques et spectrales des signaux **43**
4.1 Définition des grandeurs énergétiques . . . 43
4.1.1 Énergie et puissance physique . . . 43
4.1.2 Définition des différentes puissances d'un signal . . . 44
4.1.3 Définition des différentes énergies d'un signal . . . 44
4.1.4 Définition des différentes énergies d'interaction entre deux signaux . . . 44
4.2 Spectres des signaux . . . 45
4.2.1 La Transformée de Fourier (TF) . . . 45
4.2.2 Classification fréquentielle et temporelle des signaux . . . 46
4.2.3 Les signaux à énergie finie . . . 48
4.2.4 Les signaux à puissance moyenne finie . . . 50
4.2.5 Cas particulier des signaux périodiques . . . 50

5 Échantillonnage **53**
5.1 Représentation d'un signal échantillonné idéal . . . 54
5.2 Fréquence de Nyquist et critère de Shannon . . . 55
5.3 Interpolation de Lagrange et théorème de Shannon . . . 55
5.4 Exemples d'échantillonneurs . . . 56
5.4.1 Echantillonneurs moyenneurs . . . 56

6 Signaux numériques **59**
6.1 Définitions . . . 59
6.2 Comparaison numérique analogique . . . 60
6.2.1 Intégrale et moyenne . . . 60
6.2.2 Convolution et corrélation . . . 60
6.2.3 Signaux particuliers . . . 60
6.3 Algorithmes de Transformée de Fourier : TFD, FFT . . . 61
6.3.1 Transformation de Fourier Discrète (TFD) . . . 61
6.3.2 Propriétés et généralités sur la FFT . . . 63
6.3.3 Propriétés de la TFD ou de la FFT . . . 64
6.3.4 Défauts de la TFD . . . 64
6.3.5 Comment éviter les défauts de la TFD . . . 66
6.3.6 Notion de pondération - Fenêtrage . . . 67

7 Les systèmes linéaires - Filtres **71**
7.1 Définitions : linéarité, stationnarité . . . 71
7.2 Représentations d'un système linéaire . . . 72
7.2.1 Qu'est-ce qu'une représentation ? . . . 72
7.2.2 Définition mathématique de la représentation . . . 73
7.2.3 Représentation temporelle des systèmes linéaires . . . 74
7.2.4 Représentation fréquentielle des systèmes linéaires . . . 74
7.3 Détermination du gain complexe . . . 75
7.3.1 Vecteurs propres de l'opération de convolution . . . 75
7.3.2 Interprétation du gain complexe . . . 76
7.4 Les filtres . . . 76
7.4.1 Les filtres physiquement réalisables . . . 76
7.4.2 Causalité . . . 77

7.4.3 Stabilité . . . 77
7.5 Exemples importants des systèmes linéaires . . . 77
7.5.1 Amplificateur idéal . . . 77
7.5.2 Ligne à retard idéale . . . 78
7.5.3 Filtre passe-bande idéal . . . 78
7.5.4 Filtre passe-bas idéal . . . 78
7.5.5 Filtres intégrateurs et dérivateurs . . . 79

III Signaux Aléatoires **81**

8 Rappels de statistique nécessaire au traitement des signaux **83**
8.1 Variables aléatoires - Moments - Fonctions caractéristiques . . . 83
8.1.1 Fonction caractéristique . . . 85
8.2 Cas des variables aléatoires continues . . . 86
8.2.1 Fonction de répartition . . . 86
8.2.2 Densité de probabilité . . . 86
8.2.3 Moments d'ordre n . . . 87
8.2.4 Fonction caractéristique . . . 87
8.3 Lois de probabilité . . . 87
8.3.1 Loi uniforme continue . . . 87
8.3.2 Loi binomiale discrète . . . 88
8.3.3 Loi de Poisson . . . 88
8.4 Cas particulier des processus gaussiens . . . 88
8.4.1 Covariance statistique de deux variables aléatoires . . . 90

9 Description statistique des signaux aléatoires **93**
9.1 Qu'est ce qu'un signal aléatoire ? . . . 93
9.1.1 Signal aléatoire complexe . . . 94
9.2 Moyenne et Variance de signaux aléatoires . . . 94
9.2.1 Définition . . . 94
9.2.2 Signification physique - Exemples . . . 94
9.3 Stationnarité . . . 95
9.4 Caractérisation temporelle des propriétés statistiques des signaux aléatoires . . . 95
9.4.1 Fonction de covariance temporelle . . . 96
9.5 Fonction de corrélation ou d'autocorrélation . . . 96
9.5.1 Propriétés de la fonction d'autocorrélation . . . 96
9.6 Fonction de variables aléatoires . . . 98
9.6.1 Cas particulier de variables indépendantes . . . 98
9.6.2 Intercorrélation de deux signaux . . . 99
9.7 Ergodicité . . . 99

10 Énergie et puissance des signaux aléatoires **103**
10.1 Exemples physiques . . . 103
10.2 Définitions . . . 103
10.3 Cas des signaux complexes . . . 104
10.4 Énergie et puissance des signaux aléatoires dans le domaine spectral . . . 106
10.5 Densité spectrale de puissance (DSP) ou spectre de puissance . . . 106

10.6 Théorème de Wiener-Kinchine . . . 107
10.6.1 Cas général du théorème de Wiener-Kinchine : élément de démonstration . . . 108
10.7 Corrélation et largeur de bande spectrale . . . 109

11 Exemples de signaux aléatoires **111**
11.1 Bruit blanc - Bruit de marche aléatoire . . . 111
11.1.1 Bruit blanc . . . 111
11.1.2 Bruit de marche aléatoire . . . 112
11.2 Exemples de Densité Spectrale de Puissance . . . 113
11.3 Signal aléatoire binaire (codage NRZ) . . . 114
11.4 Signal pseudo-aléatoire - Générateur de signaux aléatoires . . . 115
11.4.1 Réalisation électronique du générateur de signaux pseudo-aléatoires . . . 116

12 Notions de bruit et fluctuations **119**
12.1 Bruit thermique - Origine Physique -Formule de Nyquist . . . 120
12.1.1 Expérience . . . 120
12.1.2 Formule de Nyquist . . . 121
12.2 Autres types de bruits - Bruit en $1/f$ . . . 122
12.3 Rapport Signal sur Bruit . . . 122
12.3.1 Définition . . . 123
12.3.2 Exemple de SNR à la sortie d'un montage . . . 123

13 Applications de l'analyse spectrale **125**
13.1 Détection d'un signal périodique . . . 126
13.1.1 Principe . . . 126
13.1.2 Calcul du SNR . . . 126
13.2 Détection d'un signal de période connue . . . 128
13.2.1 Calcul du rapport signal sur bruit . . . 128
13.3 Extraction d'un signal périodique par moyennage . . . 129
13.4 Mesure de décalage temporel de deux signaux . . . 130
13.4.1 Méthode 1 : l'intercorrélation . . . 130
13.4.2 Méthode 2 : l'interspectre . . . 130
13.4.3 Mesure de retard (cas de signaux de formes quelconques) . . . 131
13.5 Détection synchrone . . . 132
13.5.1 Objectif de la détection synchrone . . . 132
13.5.2 Démodulation synchrone . . . 132
13.5.3 Généralisation . . . 132
13.5.4 Calcul du rapport signal sur bruit . . . 133
13.5.5 Intérêt et application de la détection synchrone . . . 134
13.6 Estimation d'un signal par intercorrélation synchrone . . . 134
13.7 Identification d'un système en fonctionnement . . . 136
13.8 Filtrage adapté . . . 137
13.8.1 Définition . . . 137
13.8.2 Conséquences . . . 138

IV Techniques avancéesde Traitement du Signal **139**

14 La transformation en Ondelettes **141**
14.1 Préambule et historique 141
14.2 La transformée de Fourier à fenêtre glissante 142
14.3 Principe de base de la transformée par ondelettes 144
14.4 Exemple de transformée par ondelettes 145

Annales d'examens 3ème et 4ème année GSI **149**

Bibliographie et webographie **487**

Première partie

Introduction à la Théorie du Signal

CHAPITRE 1

Quelques définitions

1.1 Définitions de base

Un signal est la représentation physique de l'information qu'il transporte de sa source à son destinataire. Il sert de vecteur à une information. Il constitue la manifestation physique d'une grandeur mesurable (courant, tension, force, température, pression, etc.). Les signaux sont des grandeurs électriques variant en fonction du temps $x(t)$ obtenues à l'aide de capteurs. Mais le traitement du signal s'applique à tous les signaux physiques (onde acoustique, signal optique, signal magnétique, signal radioélectrique, etc.). Le traitement d'images peut être considéré comme une extension du traitement du signal aux signaux bidimensionnels (images).

Le bruit est défini comme tout phénomène perturbateur gênant la perception ou l'interprétation d'un signal, par analogie avec les nuisances acoustiques (interférence, bruit de fond, etc.). La différentiation entre le signal et le bruit est artificielle et dépend de l'intérêt de l'utilisateur : les ondes électromagnétiques d'origine galactique sont du bruit pour un ingénieur des télécommunications par satellites et un signal pour les radioastronomes.

La théorie du signal a pour objectif fondamental la "description mathématique" des signaux. Cette représentation commode du signal permet de mettre en évidence ses princi-

pales caractéristiques (distribution fréquentielle, énergie, etc.) et d'analyser les modifications subies lors de la transmission ou du traitement de ces signaux.

Le traitement du signal est la discipline technique qui, s'appuyant sur les ressources de l'électronique, de l'informatique et de la physique appliquée, a pour objet l'élaboration ou l'interprétation des signaux. Son champ d'application se situe donc dans tous les domaines concernés par la perception, la transmission ou l'exploitation des informations véhiculées par ces signaux.

Le traitement de l'information fournit un ensemble de concepts permettant d'évaluer les performances des systèmes de transfert d'informations, en particulier lorsque le signal porteur de message est "bruité". Cela inclut les méthodes de "codage de l'information" dans le but de la réduction de redondance, de la correction des erreurs, de la confidentialité (cryptage).

L'ensemble des concepts et méthodes développés dans le traitement de l'information et du signal forme **la théorie de la communication**.

Parmis les applications les plus importantes de la théorie du signal il y a la **représentation des signaux**, le codage, la transmission et le décodage de l'information. Nous aborderons également les notions de codage (analogique ou numérique) d'information. L'objectif de la théorie du signal est de proposer une palette d'outils (mathématiques) performants et de plus en plus complexes, permettant de détecter, mesurer, contrôler, comparer et évaluer l'intégrité structurelle d'un signal, d'une image ou d'une information. Cette science du génie des systèmes propose une symbiose équilibrée entre les mathématiques et la métrologie, connues pour nécessité une rigueur absolue, vis-à-vis de la théorie et de l'expérimentation, respectivement.

Les fonctions du traitement du signal peuvent se diviser en deux catégories : l'élaboration des signaux (incorporation des informations) et l'interprétation des signaux (extraction des informations). Les principales fonctions intégrées dans ces deux parties sont les suivantes :

- Élaboration des signaux
  - synthèse
  - création de signaux de forme appropriée en procédant par exemple à une combinaison de signaux élémentaires
  - modulation, changement de fréquence : moyen permettant d'adapter un signal aux caractéristiques fréquentielles d'une voie de transmission
  - codage : traduction en code binaire (quantification), etc.
- Interprétation des signaux
  - filtrage : élimination de certaines composantes indésirables
  - détection : extraction du signal d'un bruit de fond (corrélation)
  - identification : classement d'un signal dans des catégories préalablement définies
  - analyse : isolement des composantes essentielles ou utiles d'un signal de forme com-

plexe (transformée de Fourier)
- mesure : estimation d'une grandeur caractéristique d'un signal avec un certain degré de confiance (valeur moyenne, etc.)

1.2 Classification des signaux

Pour faciliter l'étude des signaux, différents modes de classification peuvent être envisagés :

- **représentation temporelle** des signaux
- **représentation spectrale** pour laquelle le signal est classé par le domaine de variation de la fréquence moyenne Δ_f :
  - Δf < 250 KHz : signaux basses fréquences (BF)
  - 250 KHz < Δf < 30 MHz : signaux hautes fréquences (HF)
  - 30 MHz < Δf < 300 MHz : signaux très hautes fréquences (VHF)
  - 300 MHz < Δf < 3 GHz : signaux ultra hautes fréquences (UHF)
  - Δf > 3 GHz : signaux super hautes fréquences (SHF)

  Lorsque la fréquence du signal devient très grande, pratiquement supérieure à quelques térahertz (1 THz=10^{12} Hz), la longueur d'onde λ est le paramètre de référence ($\lambda = c/F$ avec c : vitesse de la lumière 300000 Km/s) :
  - 700 nm < λ < 0, 1 mm signal lumineux infrarouge
  - 400 nm < λ < 700 nm signal lumineux visible
  - 10 nm <λ < 400 nm signal lumineux ultraviolet
- **les signaux certains (ou déterministes)** dont l'évolution en fonction du temps peut être parfaitement décrite par un modèle mathématique. Ces signaux proviennent de phénomènes pour lesquels on connaît les lois physiques correspondantes et les conditions initiales, permettant ainsi de prévoir le résultat. Les signaux non périodiques se composent d'une part des signaux pseudo-périodiques formés d'une somme de sinusoïdes de périodes différentes et d'autre part des signaux transitoires dont l'existence est limitée dans le temps. Ces signaux "certains" peuvent en principe être reproduits rigoureusement identiques à eux-mêmes.
- **les signaux aléatoires (ou probabilistes)** dont le comportement temporel est imprévisible et pour la description desquels il faut se contenter d'observations statistiques.
- **caractéristique morphologique (signal continu ou discret)**. Le temps est un paramètre important de classification. Le traitement numérique des signaux conduit à faire la distinction entre les signaux dits à temps continus (signaux continus) et les signaux dits à temps discrets (signaux discrets ou échantillonnés). Un autre paramètre des signaux

traités est à prendre en compte, c'est l'amplitude qui peut aussi être continue ou discrète (quantifiée). Ainsi quatre formes de signaux, qui se retrouvent dans un système numérique de contrôle d'un processus physique, peuvent être distinguées (cf figure 1.2) :

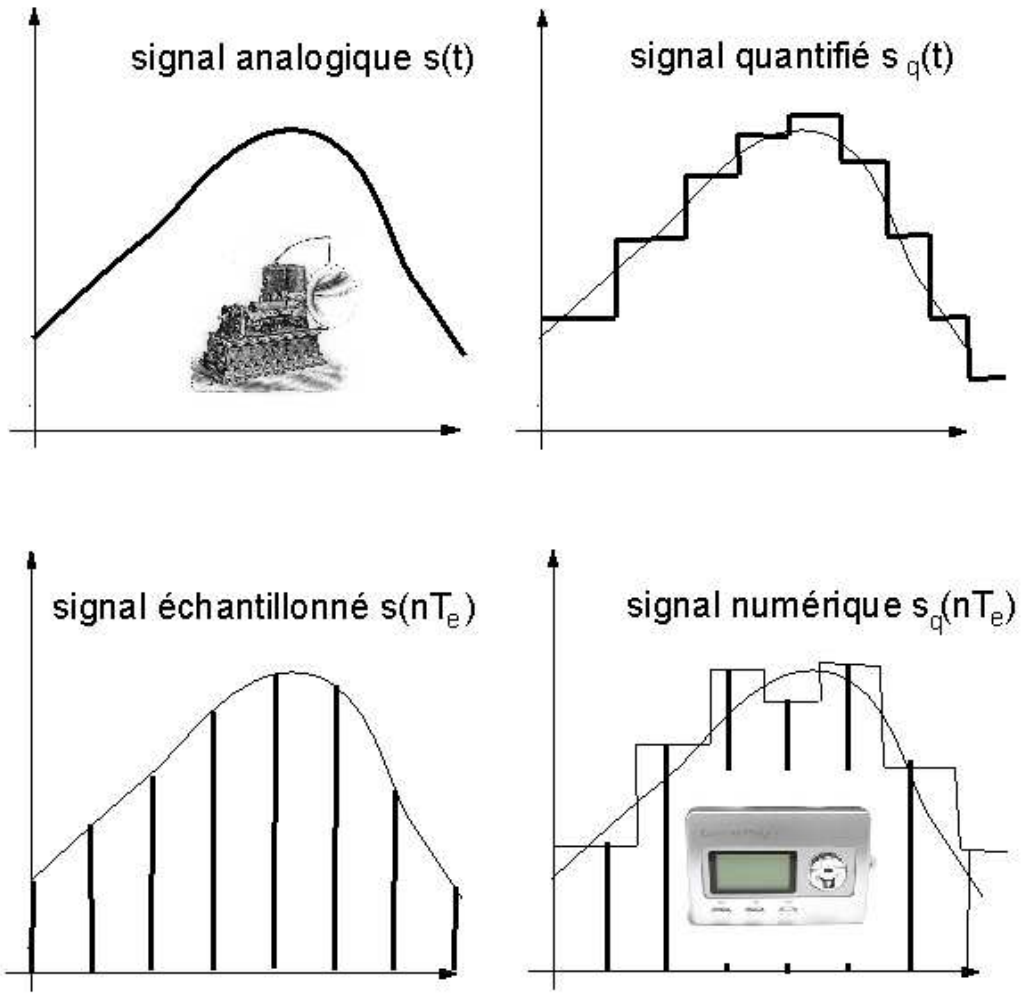


FIGURE 1.1 – *Les quatre types de signaux classés suivant leur morphologie (continu ou discret)*

- signal à amplitude et temps continus (**signal analogique**) : $s(t)$
- signal à amplitude discrète et temps continu (**signal quantifié**) : $S_q(t)$. Ce signal correspond à celui qui est fourni à la sortie d'un circuit convertisseur numérique analogique pour la commande d'un actionneur
- signal à amplitude continue et temps discret (**signal échantillonné**) : $s(nTe)$. Ce signal, obtenu à l'aide d'un circuit échantillonneur bloqueur, est transmis à un circuit convertisseur analogique numérique pour obtenir un signal numérique utilisable par un ordinateur
- signal à amplitude discrète et temps discret (**signal logique ou numérique**) : $s_q(nT_e)$.

Ce dernier cas correspond en réalité à une suite de nombres codés en binaire. Ces nombres, utilisés au sein d'un ordinateur, se transmettent sous la forme de plusieurs signaux de type numérique 0 V (0 logique) ou 5 V (1 logique) se propageant en parallèle : 8 signaux pour un nombre codé sur 8 bits.

La numérisation d'un signal est l'opération qui consiste à faire passer un signal de la représentation dans le domaine des temps et des amplitudes continus au domaine des temps et des amplitudes discrets. Cette opération de numérisation d'un signal peut être décomposée en deux étapes principales : échantillonnage et quantification.

La restitution (ou l' interpolation) constitue le processus inverse qui intervient lors du passage du signal numérique au signal analogique : commande d'un actionneur. Ces trois étapes sont indissociables. En effet, le signal, étant le support physique d'une information, doit conserver au cours de ces modifications tout le contenu informatif initial. Cette condition, ajoutée à la notion de coût limite d'un système, va être à la base de la numérisation des signaux et de l'étude du traitement numérique.

1.3 Interpretation des signaux

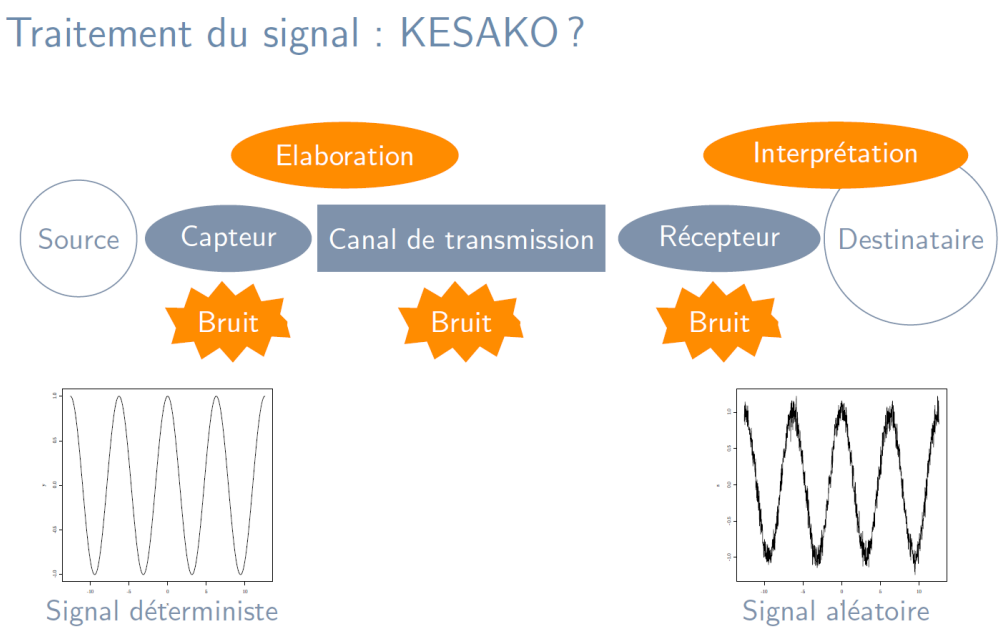


FIGURE 1.2 – *Représentation des signaux en vue d'une interprétation physique (D'après le support de cours de Camille Charbonnier https://camillecharbonnier.files.wordpress.com/2013/02/slides.pdf)*

Deuxième partie

Signaux Déterministes

CHAPITRE 2

Théorie des distributions

2.1 Position du problème

Examinons quelques problématiques menant à la prise en considération de la notion de distributions en Physique et en Traitement du Signal.

2.1.1 Problème de la charge ponctuelle

Considérons une sphère centrée à l'origine et chargée positivement par une densité de charge $\rho(x, y, z)$ et de charge totale $Q = \int\int\int_R \rho(x, y, z)\ \ dxdydz$ et de potentiel associé $V = \int\int\int_R \frac{\rho(x,y,z)}{r}\ \ dxdydz$ où r désigne la distance du point à un élément de charge $\rho d\tau$.

Problème :

- le volume tend vers 0
- représenter $\rho(x, y, z)$ si $\rho(x, y, z)$ devient nulle
- la fonction densité $\rho(x, y, z)$ n'est pas accessible à la mesure, seule l'intégrale (le potentiel V) l'est.
- trouver une représentation pour des fonctions nulles presque partout et d'intégrale non nulle

Solution :
- les distributions
- remplacer l'étude de la fonction $f(x)$ ($\rho(x,y,z)$ par exemple) par celle des familles d'intégrales $\int f(x)\phi(x)dx$ pour un choix judicieux des fonctions ϕ appelées fonctions-tests, jouant le rôle de "l'instrument de mesure".

2.1.2 Problème de la charge d'un condensateur

Pour comprendre l'intérêt de la théorie des distributions, l'exemple le plus élémentaire consiste à étudier en profondeur le problème pratique de la charge (via une alimentation (E,r)) d'un condensateur réel (C,r') (Fig ;2.1).

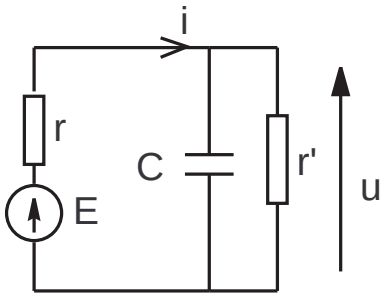


FIGURE 2.1 – *Charge d'un condensateur réel de résistance de fuite r' à partir d'une alimentation réelle de résistance interne r.*

L'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ aux bornes de ce condensateur vérifie

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = \frac{E}{rC} \text{ où } \tau = \frac{rC}{1+r/r'}, \tag{2.1}$$

s'intègre aisément et donne pour expression :

$$\begin{cases} u(t) = \frac{E}{1+r/r'}\left(1-e^{-t/\tau}\right) & \text{pour } t>0, \\ u(t) = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Le courant $i_c(t)$ aux bornes du condensateur possède une discontinuité en 0 et s'écrit

$$\begin{cases} i_c(t) = C\frac{du}{dt} = \frac{CE}{1+r/r'}\left(\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\right) = \frac{E}{r}e^{-t/\tau} & \text{pour } t>0, \\ i_c(t) = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.3}$$

Cette discontinuité n'empêche pas de calculer la charge totale $q(t)$ du condensateur donnée par $q(t) = \int_{-\infty}^{t} i_c(t')dt'$ qui se trouve être une fonction tout-à-fait définie. Étudions à présent quelques limites physiques :

♡ si $r' \mapsto \infty$ (cas d'un condensateur parfait sans résistance de fuite). On a

$$\begin{cases} i_c(t) & = \frac{E}{r} e^{-t/rC} \\ u(t) & = E\left(1 - e^{-t/rC}\right) \end{cases} \tag{2.4}$$

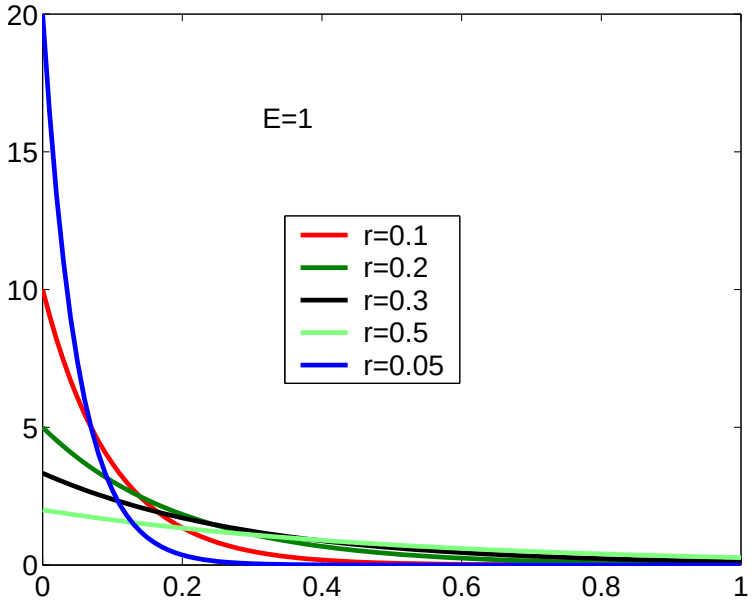


FIGURE 2.2 – *Lorsque $r \mapsto 0$, la constante de temps tend vers 0, et l'amplitude tend vers l'infini, mais l'intégrale de la courbe vaut toujours EC*

En régime permanent, la charge totale du condensateur est toujours

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} i_c(t')dt' = CE. \tag{2.5}$$

Que se passe-t-il lorsque $r \mapsto 0$?

- l'amplitude de $i_c(t)$ tends vers l'infini : apparition d'une étincelle
- la constante de temps tends vers 0
- La charge totale existe et vaut toujours $Q = EC$

Il est donc nécessaire de définir une fonction $f(t)$ d'amplitude infinie et de largeur nulle telle que $\int_{-\infty}^{\infty} f(t')dt' = CE$.

♢ Si $r' \mapsto 0$, examinons les limites de Eq.(2.1) : Si on suppose que $\frac{du}{dt}$ n'est pas infini, cette équation se simplifie par

$$u = \frac{r'}{r' + r} E, \tag{2.6}$$

qui se trouve être le diviseur de tension. L'hypothèse $\frac{du}{dt} \neq \infty$ nous empêche de considérer le cas $r' \mapsto 0$ car dans ce cas la dérivée peut être infinie.

Sachant que les cas $r' \mapsto 0$ et $r \mapsto 0$ sont des situations non marginales en électronique, la volonté de prendre en considération ces cas nécessite

- une amélioration du modèle pour rendre compte de la physique à l'instant $t = 0$ (modélisation de l'étincelle)
- la définition de "fonctions" pouvant prendre des valeurs infinies pendant un temps nul et possédant une intégrale finie : **les distributions**

Ainsi, de nombreuses situations physiques réelles font intervenir des phénomènes similaires, liés à des changements d'état instantanés, dont ni la durée, ni l'intensité ne peuvent être mesurées. C'est pour pouvoir appréhender correctement ces situations (ainsi que des distributions ponctuelles de masse et/ou de charge électrostatique) que L. Schwartz a développé la théorie des distributions, en complément des travaux antérieurs de Heaviside et de Dirac.

2.2 Les distributions

Définition : Une application T qui à toute fonction ϕ de $\mathcal{D}$ (espace des fonctions à support borné) fait correspondre un nombre noté $< T, \phi >$ est appelé distribution si elle vérifie les propriétés suivantes :

- linéarité : $< T, a_1\phi_1 + a_2\phi_2 >= a_1 < T, \phi_1 > + a_2 < T, \phi_2 >$
- continuité

Les distributions forment un espace vectoriel appelé $\mathcal{D}'$.

Quelques distributions importantes

- distributions régulières (fonctions) : la distribution régulière associée à f est définie par

$$< f, \phi >= \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)dx, \tag{2.7}$$

  où $\phi(x)$ est la fonction test.
- distributions singulières : distribution de Dirac (ou masse de Dirac). La distribution de Dirac est une distribution très utilisée en Physique et en analyse des systèmes. La définition est la suivante : L'application $\phi \mapsto \phi(a)$ qui à toute fonction ϕ fait correspondre sa valeur au point a s'appelle masse de Dirac en a. On la note δ_a, ainsi $< \delta_a, \phi >= \phi(a)$. On abrège δ_0 en δ et ainsi $< \delta, \phi >= \phi(0)$.

2.2.1 Propriétés essentielles des distributions

- opérateurs linéaires : $< \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2, \phi >= \lambda_1 < T_1, \phi > + \lambda_2 < T_2, \phi >$.
- égalité presque partout : $< T_1, \phi >=< T_2, \phi >$, $\forall \phi$

– translation d'une distribution : $f(x)$ étant localement sommable, cherchons la distribution associée à $f(x-a)$:

$$< f(x-a), \phi(x) >= \int_{\mathbb{R}} f(x-a)\phi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x+a)dx, \tag{2.8}$$

d'où

$$< T(x-a), \phi(x) >=< T(x), \phi(x+a) > . \tag{2.9}$$

Exemple : Calcul de la translatée de $\delta(x)$

$$< \delta(x-a), \phi(x) >=< \delta(x), \phi(x+a) >= \phi(a) =< \delta_a, \phi(x) > . \tag{2.10}$$

– dilatation d'abscisse : si $a \neq 0$,

$$< f(ax), \phi(x) >= \int_{\mathbb{R}} f(ax)\phi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\phi\left(\frac{u}{a}\right)\frac{du}{|a|} = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\phi\left(\frac{u}{a}\right)du. \tag{2.11}$$

La valeur absolue est nécessaire pour conserver l'ordre des bornes d'intégration, d'ou

$$< T(ax), \phi(x) >= \frac{1}{|a|} < T(u), \phi(\frac{u}{a}) > . \tag{2.12}$$

Exemple : Calcul de $\delta(ax)$

$$< \delta(ax), \phi(x) >= \frac{1}{|a|} < \delta(x), \phi(x/a) >= \frac{1}{|a|}\phi(0) = \frac{1}{|a|} < \delta(x), \phi(x) > . \tag{2.13}$$

– dérivation d'une distribution : pour une distribution régulière (fonction) :

$$< f'(x), \phi(x) >= \int_{\mathbb{R}} f'(x)\phi(x)dx = \Big[f(x)\phi(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)dx, \tag{2.14}$$

donc par définition, on peut généraliser la dérivée d'ordre n par

$$< T^{(n)}(x), \phi(x) >= (-1)^n < T(x), \phi^{(n)}(x) >, \tag{2.15}$$

et de ce fait toute distribution est indéfiniment dérivable.
Exemple 1 : distribution de Dirac :

$$< \delta'(x), \phi(x) >= - < \delta(x), \phi'(x) >= -\phi'(0). \tag{2.16}$$

Exemple 2 : dérivation de la fonction échelon (encore appelée fonction d'Heaviside) $h(x) = 1$ si $x > 0$ et $h(x) = 0$ sinon.

$$\begin{aligned} < h'(x), \phi(x) > &= - < h(x), \phi'(x) >= -\int_0^{+\infty} \phi'(x)dx & (2.17)\\ &= -\Big[\phi(x)\Big]_0^{+\infty} = \phi(0) =< \delta(x), \phi(x) > . & (2.18) \end{aligned}$$

On peut également déterminer la dérivée (au sens des distributions) d'une fonction discontinue en a par

$$\left[f'(x)\right] = f'(x) + [f(a^+) - f(a^-)]\delta(x-a) \tag{2.19}$$

2.2.2 Convolution des distributions

La convolution est une opération très importante et fondamentale en analyse des systèmes et traitement des signaux. Rappelons ses propriétés relatives aux distributions. Soient f et g deux fonctions dont le produit de convolution ($.*.$) existe, ainsi

$$\begin{aligned} \forall\phi < f*g,\phi > &= \int_{\mathbb{R}}[f(t)*g(t)]\phi(t)dt = \int_{\mathbb{R}}\phi(t)dt\int_{\mathbb{R}}f(\tau)g(t-\tau)d\tau, && (2.20)\\ &= \int\int_{\mathbb{R}}f(\tau)g(t-\tau)\phi(t)dtd\tau = \int\int_{\mathbb{R}}f(x)g(y)\phi(x+y)dxdy, && (2.21)\end{aligned}$$

en posant $x = \tau$, et $y = t - \tau$. Donc

$$< f*g,\phi >=< f(x),< g(y),\phi(x+y) >> . \tag{2.22}$$

Les conditions d'existence du produit de convolution n'a de sens que si l'un des supports des deux fonctions f et g est borné. Les distributions à support bornée à gauche (appelée distributions causales) forment un espace vectoriel dans lequel la convolution a toujours un sens.

Les différentes propriétés de la convolution entre deux distributions sont :
- commutativité
- distributivité
- associativité si les produits de convolution ont un sens

Exemples :
- convolution par $\delta(x)$ (en utilisant Eq.2.10) :

$$\begin{aligned} < \delta(x)*T,\phi(x) > &= < T(y),< \delta(x),\phi(x+y) >, && (2.23)\\ &= < T(y),\phi(y) >= \Rightarrow \delta(x)*T = T. && (2.24)\end{aligned}$$

La distribution de Dirac est l'élément neutre pour la convolution.
- Convolution par $\delta(x-a)$:

$$\begin{aligned} < \delta(x-a)*T,\phi(x) > &= < T(y),< \delta(x-a),\phi(x+y) >>, && (2.25)\\ &= < T(y),\phi(y+a) >=< T(x-a),\phi(x) >, && (2.26)\\ &\Rightarrow \delta(x-a)*T(x) = T(x-a), && (2.27)\end{aligned}$$

et la translation est équivalente à une convolution par $\delta(x-a)$.

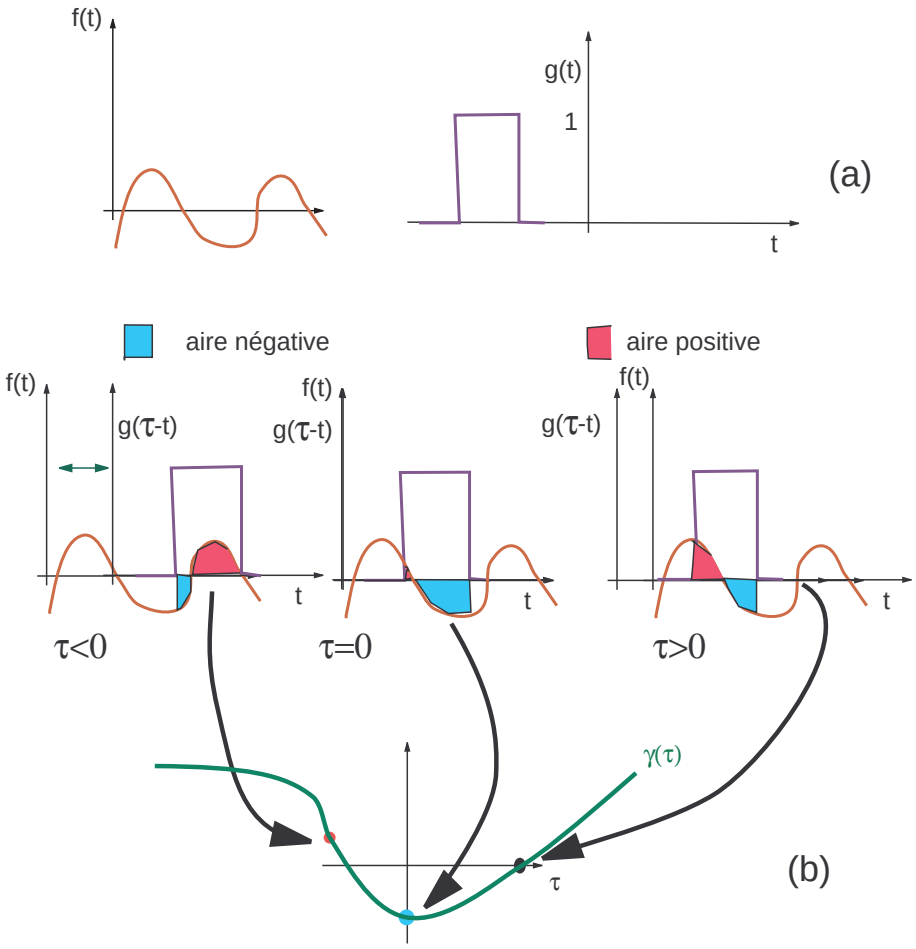


FIGURE 2.3 – *Représentation graphique du produit de convolution* $\gamma(\tau) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(\tau - t)dt$

– Convolution par $\delta'(x)$(en utilisant Eq.2.16)

$$
\begin{aligned}
< \delta'(x) * T, \phi(x) > &= < T(y), < \delta'(x), \phi(x+y) >, && (2.28)\\
&= - < T(y), \phi'(y) >=< T'(x), \phi(x) >, && (2.29)\\
&\Rightarrow \delta'(x) * T(x) = T'(x), && (2.30)
\end{aligned}
$$

et de même $\delta^{(n)}(x) * T(x) = T^{(n)}(x)$.

Remarque importante : l'opération de convolution par $\delta'(x)$ est équivalente à la dérivation de la distribution.

Remarque importante : dérivée d'une convolution $T = R * S$:

$$
\begin{aligned}
T' &= \delta'(x) * R * S = (\delta'(x) * R) * S = R' * S && (2.31)\\
&= \delta'(x) * R * S = (\delta'(x) * S) * R = R * S' && (2.32)
\end{aligned}
$$

On en déduit que pour dériver un produit de convolution, il suffit de dériver l'un des termes. D'où son utilité en traitement du signal dans la mesure où la dérivée de certaines fonctions d'appareils ("fonctions tests") n'est pas forcément toujours bien connue.

2.3 Transformations de Laplace et Fourier des distributions

Les transformées de Laplace et Fourier sont des opérations fondamentales pour les applications des domaines du génie électrique, génie mécanique ou du génie des systèmes. Il s'agit de distributions définies sur une classe de fonctions tests très spécifiques : les fonctions exponentielles.

2.3.1 Transformations de Laplace

On définit la transformation de Laplace $\mathcal{L}[T](p)$ d'une distribution T par

$$\mathcal{L}[T](p) =< T, exp(-pt) > \text{ avec } t > 0. \tag{2.33}$$

Dans le cas où la distribution T est régulière (s'il s'agit d'une fonction), la transformée de Laplace s'exprime simplement à partir d'une formulation intégrale,

$$F(p) =< f(t), \exp(-pt) >= \int_0^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt. \tag{2.34}$$

Quelques résultats :
- $\mathcal{L}[\delta] =< \delta(t), \exp(-pt) >= \exp(-pt)|_{t=0} = 1$
- $\mathcal{L}[\delta'] =< \delta'(t), \exp(-pt) >= - < \delta(t), \exp(-pt)' >= p \exp(-pt)|_{t=0} = p$
- $\mathcal{L}[\delta^{(n)}] = p^n$

La TL trouve son intérêt et son champs d'application en automatique.

2.3.2 Transformations de Fourier (TF) des distributions

Rappelons quelques résultats fondamentaux concernant la transformation de Fourier et utiles en traitement des signaux.

Définition de la transformée de Fourier d'une distribution :

$$\mathcal{F}[T](\nu) =< \mathcal{F}[T], \phi >=< T, \mathcal{F}[\phi] >=< T, \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) e^{-2i\pi\nu t} dt > \tag{2.35}$$

Dans le cas d'une fonction, on a également :

$$\mathcal{F}[f](\nu) =< \mathcal{F}[f], \phi >=< f(t), \mathcal{F}[\phi] >=< f(t), \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) e^{-2i\pi\nu t} dt > \tag{2.36}$$

mais

$$< \mathcal{F}[f], \phi(\nu) > = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\nu) e^{-2i\pi\nu t} d\nu \right) dt \tag{2.37}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\nu) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \right) d\nu, \tag{2.38}$$

et par identification des termes, on retrouve la définition classique de la TF d'une fonction :

$$F(\nu) = \mathcal{F}[f](\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt. \tag{2.39}$$

Transformation Fourier inverse

La TF inverse, notée $\mathcal{F}^{-1}$ est également définie et permet, à partir de la TF de reconstruire la fonction $f(t)$. Elle s'écrit :

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu. \tag{2.40}$$

Transformation de Fourier d'un produit de convolution

En reprenant le résultat fondamental concernant la convolution d'une distribution (Eq.2.21), mais avec $\phi(x+y) = e^{-2i\pi\nu(x+y)}$, on arrive au résultat fondamental (théorème de Plancherel) :

$$\mathcal{F}[f * g](\nu) = \mathcal{F}[f](\nu)\mathcal{F}[g](\nu) \tag{2.41}$$

Transformation de Fourier d'un produit classique

On peut également montrer le résultat fondamental suivant :

$$\mathcal{F}[f.g](\nu) = \mathcal{F}[f](\nu) * \mathcal{F}[g](\nu) \tag{2.42}$$

Quelques TF importantes en Traitement du Signal

Transformation de Fourier d'un Dirac

$$\forall \phi \quad < \mathcal{F}[\delta], \phi(t) > = < \delta, \mathcal{F}[\phi](t) >= \mathcal{F}[\phi](0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt =< 1, \phi(t) > \tag{2.43}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}[\delta] = 1} \tag{2.44}$$

Transformation de Fourier d'un Dirac translaté

$$\begin{aligned}
\forall\phi \quad <\mathcal{F}[\delta(t-a)],\phi> &= <\delta(t-a),\mathcal{F}[\phi](t)>=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)e^{-2i\pi\nu a}dt && (2.45)\\
&= <e^{-2i\pi\nu a},\phi> && (2.46)\\
&\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}[\delta(t-a)]=e^{-2i\pi\nu a}} && (2.47)
\end{aligned}$$

Transformation de Fourier de la fonction constante $f(t)=1$

$$\begin{aligned}
\forall\phi \quad <\mathcal{F}[1],\phi> &= <1,\mathcal{F}[\phi](t)>=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)dt=\phi(0) && (2.48)\\
&= <\delta(\nu),\phi(\nu)> && (2.49)\\
&\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}[1]=[\delta(\nu)]} && (2.50)
\end{aligned}$$

Transformation de Fourier de la dérivée d'un Dirac ($\equiv$ à une dérivation)

$$\begin{aligned}
\forall\phi \quad <\mathcal{F}[\delta'],\phi(\nu)> &= -<\delta(t),\frac{d}{dt}\mathcal{F}\phi(t)>=-\frac{d}{dt}\mathcal{F}\phi(t)\Big|_{t=0} && (2.51)\\
&= -\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\nu)e^{-2i\pi\nu t}d\nu\Big|_{t=0} && (2.52)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\nu)2i\pi\nu d\nu && (2.53)\\
&\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}[\delta'(t)]=2i\pi\nu} && (2.54)
\end{aligned}$$

Transformation de Fourier de la dérivée d'une distribution

Sachant que la dérivation consiste à convoluer par la distribution $[\delta']$, en utilisant la relation (2.54) et en généralisant à la dérivée d'ordre n, il vient :

$$\boxed{\mathcal{F}\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right]=(2i\pi\nu)^n\mathcal{F}[f]}. \tag{2.55}$$

Transformation de Fourier de la primitive d'une distribution

De la même manière, on peut montrer que

$$\boxed{\mathcal{F}[\int f]=\frac{1}{(2i\pi\nu)}\mathcal{F}[f]+C\delta(f)}, \tag{2.56}$$

où C est la constante d'intégration.

Peigne de Dirac et formule sommatoire de Poisson

On définit le peigne de Dirac par la fonction "shah" (lettre de l'alphabet russe) :

$$\underset{T}{\sqcup\!\sqcup\!\sqcup}(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT). \tag{2.57}$$

Il s'agit d'une distribution infinie de Dirac de période T. La transformée de Fourier $S(\nu)$ de la relation (2.57) est appelée somme infinie d'exponentielles (souvent appelées exponentielles éternelles) :

$$S(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-2i\pi\nu nT} \tag{2.58}$$

On constate, par un changement de ν en $\nu + 1/T$, que l'équation (2.58) est invariante, i.e.

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-2i\pi(\nu+1/T)nT} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-2i\pi(\nu nT)} e^{-2i\pi n} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-2i\pi\nu nT}; \tag{2.59}$$

ce qui confère à $S(\nu)$ la propriété de périodicité.

Effectuons à présent le calcul de

$$S(\nu)e^{2i\pi\nu T} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-2i\pi(\nu nT)} e^{2i\pi\nu T} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-2i\pi\nu(n-1)T} = S(\nu), \tag{2.60}$$

d'où le résultat

$$S(\nu)(e^{2i\pi\nu T} - 1) = 0. \tag{2.61}$$

Pour que cette relation soit vérifiée, il faut que $S(\nu)$ soit nul, sauf pour $\nu = \frac{k}{T}$, ce qui implique que $S(\nu)$ est une combinaison linéaire de fonctions de Dirac ; soit

$$S(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k \delta(\nu - k/T), \tag{2.62}$$

Sachant que $S(\nu)$ est périodique, $S(\nu) = S(\nu + 1/T)$, on a $a_k = a$ pour tout k, /ie

$$S(\nu) = a \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(\nu - k/T), \tag{2.63}$$

où a est le coefficient de proportionnalité à déterminer. En calculant par exemple :

$$< S(\nu), \Pi(\nu T) >, \tag{2.64}$$

où $\Pi(\nu T)$ est la fonction porte (ou fenêtre !!!) centrée en $\nu = 0$ de largeur T. Seul le terme correspondant à $n = 0$ sera non nul puisqu'il est le seul à être compris dans la porte :

$$< S(\nu), \Pi(\nu T) >=< a\delta(\nu), \Pi(\nu T) >=< \delta(\nu), a\Pi(\nu T) >= a \tag{2.65}$$

De même,

$$< S(\nu), \Pi(\nu T) >= \int_{-/2T}^{+1/2T} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-2i\pi\nu nt} dt = \int_{-1/2T}^{+1/2T} dt = 1/T, \tag{2.66}$$

puisque l'intégration se fait sur un nombre entier de périodes. On en déduit un résultat fondamental concernant la transformation de Fourier d'un peigne de Dirac :

$$\boxed{TF\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)\right\} = \frac{1}{T}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - p/T)} \tag{2.67}$$

Transformée de Fourier d'une fonction périodique (formule sommatoire de Poisson)

Le résultat du calcul précédent permet de considérer les fonctions périodiques comme des distributions (Fig.2.4) et ainsi de pouvoir en déterminer la transformée de Fourier.

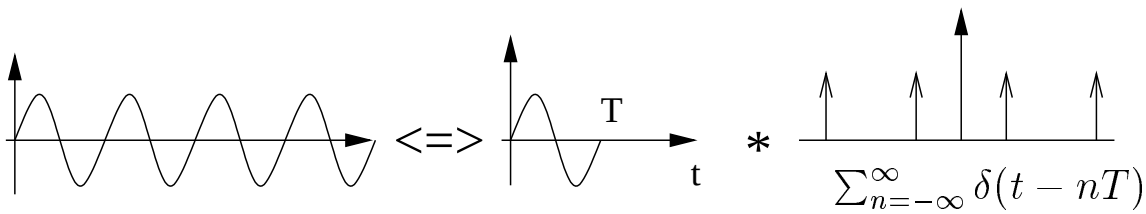


FIGURE 2.4 – *Les fonctions périodiques considérées comme une distribution*

En effet, toute fonction périodique $f(t)$ peut s'écrire :

$$f(t) = f_T(t) * \sqcup\!\sqcup_T(t), \tag{2.68}$$

où $f_T(t)$ est une fonction égale à $f(t)$ sur $[0, T]$ et nulle ailleurs. La transformée de Fourier de $f(t)$ s'écrit alors

$$F(\nu) = f_T(\nu).\frac{1}{T}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - p/T) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\mathcal{F}[f_T](p/T)\delta(\nu - p/T), \tag{2.69}$$

car

$$f(\nu)\delta(\nu - p/T) = f(p/T)\delta(\nu - p/T). \tag{2.70}$$

Par transformation de Fourier inverse,

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_T(t-pT) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\mathcal{F}[f_T](p/T)e^{2i\pi pt/T}, \tag{2.71}$$

et si nous faisons $t = 0$,

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_T(pT) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\mathcal{F}[f(p/T)], \tag{2.72}$$

Les fonctions périodiques considérées comme étant des distributions permet de définir la convolution d'un produit de fonctions périodiques qui reste une fonction périodique (cf Fig.2.5)

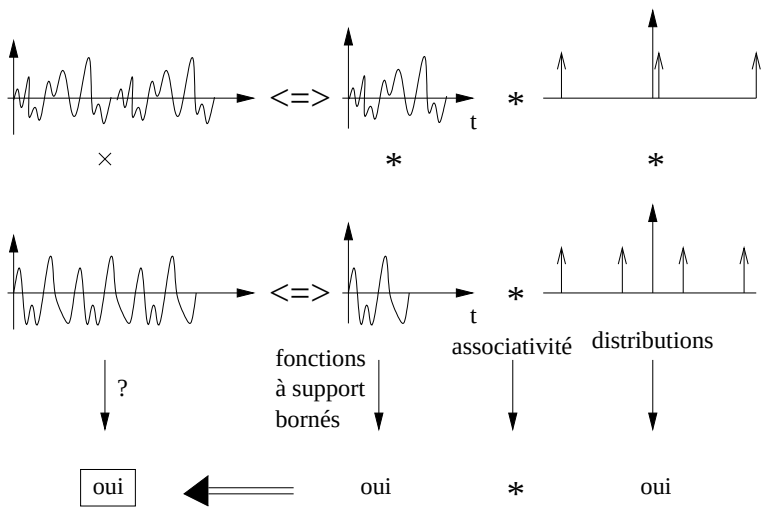


FIGURE 2.5 – *Le produit de fonction périodique est une fonction périodique et sa transformée de Fourier existe au sens des distributions*

Propriétés de parité de la Transformée de Fourier (Symétries Hermitiques)

La transformée de Fourier possède des propriétés de parité résumées dans le tableau Tab.2.1

Formulaire de Transformées de Fourier usuelles

La plupart des fonctions nécessaires au traitement du signal et à la caractérisation des systèmes est représentée dans le tableau Tab.14.6

Fonction $x(t)$	Transformée de Fourier $X(\nu)$
réelle	complexe (partie réelle paire et partie imaginaire impaire)
réelle paire	réelle paire
réelle impaire	imaginaire impaire
imaginaire	complexe (partie réelle impaire, partie imaginaire paire)
imaginaire paire	imaginaire paire
imaginaire impaire	réelle impaire

TABLE 2.1 – *Propriétés de parité de la Transformée de Fourier*

Représentation temporelle	Représentation spectrale
Porte $x(t) = A\Pi_\tau(t)$	$X(\nu) = A\tau\frac{\sin(\pi\nu\tau)}{\pi\nu\tau}$
Sinusoïde tronquée $x(t) = A\sin(2\pi\nu_0 t)\Pi_\tau(t)$	$X(\nu) = \frac{jA\tau}{2}\left[\frac{\sin(\pi(\nu+\nu_0)\tau)}{\pi(\nu+\nu_0)\tau} - \frac{\sin(\pi(\nu-\nu_0)\tau)}{\pi(\nu-\nu_0)\tau}\right]$
Sinus cardinal $x(t) = A\frac{\sin(\pi\nu_0\tau)}{\pi\nu_0\tau}$	$X(\nu) = \frac{A}{\tau}\Pi_\tau(\nu)$
Triangle $x(t) = \Lambda_{2\tau}(t)$	$X(\nu) = A\tau\left[\frac{\sin(\pi\nu\tau)}{\pi\nu\tau}\right]^2$
Exponentielle symétrique $x(t) = Ae^{-a\|t\|}$	$X(\nu) = \frac{2Aa}{a^2+4\pi^2\nu^2}$
Fonction d'Heaviside (échelon unité) $H(t)$	$X(\nu) = \frac{1}{2j\pi\nu} + \frac{1}{2}\delta(\nu)$
Fonction signe $x(t) = sgn(t) = \frac{t}{\|t\|}$	$X(\nu) = \frac{1}{j\pi\nu}$
Exponentielle décroissante $x(t) = AH(t)e^{-\alpha t}$	$X(\nu) = \frac{A}{\alpha+2j\pi\nu}$
Sinusoïde amortie $x(t) = AH(t)\sin(2\pi\nu_0 t)\exp -\alpha t$	$X(\nu) = \frac{2A\pi\nu_0}{(\alpha+2j\pi\nu)^2+(2\pi\nu_0)^2}$
Gaussienne $x(t) = A\exp(-\alpha t^2)$	$X(\nu) = A\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\exp(-\frac{(\pi\nu)^2}{\alpha})$

TABLE 2.2 – *Transformées de Fourier de fonctions et distributions usuelles*

CHAPITRE 3

Les signaux certains ou déterministes

3.1 Introduction

Un signal certain se représente souvent sous la forme d'une fonction du temps (ou de la distance, s'il s'agit de l'optique) de support $T = [a, b]$ où a et b sont éventuellement infinis. La donnée de cette fonction du temps décrit complètement le signal. Mais il peut être intéressant de décrire le signal d'une autre manière. La description temporelle (qui semble la plus naturelle) possède un certain nombre d'avantages mais rend compte difficilement de la nature physique des processus. Ainsi, la description des systèmes par la notion de fonction de transfert engendre une représentation des signaux qui, historiquement, permet de caractériser ceux-ci à l'aide d'une autre approche : l'approche fréquentielle ou analyse fréquentielle.

3.2 Définitions-Exemples

Un signal, noté dans certains ouvrages $|x(t)\rangle$, $|x\rangle$ ou tout simplement x, est considéré comme un élément d'un ensemble $\mathcal{S}$ appelé ensemble de signaux. Chaque ensemble de signaux sera défini (comme tout ensemble) par une propriété caractéristique de ces éléments.

Exemples On définit par

- $\mathcal{S}_c$ ensemble des signaux sinusoïdaux de fréquence ν :
  $\mathcal{S}_c = \left\{|x(t)\rangle; x(t) = \Re(\rho e^{j(\alpha+2\pi\nu t)}), t \in]-\infty, +\infty[, \rho \in \mathbb{R}\right\}$.
- $\mathcal{L}^2(T)$ ensemble des signaux de carré sommable (signaux d'énergie finie) sur T :

$$\mathcal{L}^2(T) = \left\{|x(t)\rangle; \int_T |x(t)|^2 dt < \infty\right\} \tag{3.1}$$

- $\mathcal{L}^2_P$ ensemble des signaux de puissance moyenne finie sur T :
  $\mathcal{L}^2_P = \left\{|x(t)\rangle; \lim_{\theta\to\infty} \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{+\theta} x^*(t)x(t)dt < \infty\right\}$

Tout ces ensembles permettant la classification des signaux jouent un rôle très important en analyse et traitement du signal.

3.3 Espace de Hilbert des signaux

Les signaux définissent un espace vectoriel (EV) sur le corps des complexes $\mathbb{C}$, munit de l'addition et de la multiplication. La structure d'EV entraîne l'existence d'une dimension et de **bases**. Le choix de la base est donc fondamental et doit rendre compte de la Physique, des hypothèses et des propriétés des systèmes.

3.4 Bases continues

Tout signal $|x(t)\rangle$ peut se décomposer sur une base de fonctions $|u_i(t)\rangle$, avec $|x(t)\rangle = \sum_i a_i|u_i(t)\rangle$. Dans le cas de signaux continus, on peut montrer que $x(t) = \int_{\mathbb{R}} x(s)u(s)ds$ où $x(s)$ est la représentation s de $x(t)$.

Les bases continues orthonormées sont définies par

$$< u(s)|u(s') >= \delta(s - s') \tag{3.2}$$

Exemples

Représentation temporelle Considérons des signaux s'exprimant sur la base $\{|u(\theta)\rangle = \delta(t-\theta)\}$ où θ est le paramètre continu. On montre que l'on a une base orthonormée (Exercice).

Résultat important : la fonction du temps représentant un signal est une représentation continue de ce signal dans la base des Dirac translatés.

Représentation spectrale Considérons les signaux s'exprimant sur la base $\{|u(\nu)\rangle = e^{-2i\pi\nu t})\}$. On peut montrer que la base est orthonormée, car

$$< u(\nu)u(\nu') >= \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi(\nu-\nu')t}dt = \int_{\mathbb{R}} \overline{u(\nu)}u(\nu')dt = \delta(\nu-\nu'), \tag{3.3}$$

et que $X(\nu)$ la transformée de Fourier de $x(t)$ est la représentation fréquentielle de $x(t)$, car

$$X(\nu) =< u(\nu)x(t) >= \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-2i\pi\nu t}dt. \tag{3.4}$$

3.5 Egalité de Parseval-Plancherel

Calculons le produit scalaire $< x(t)x(t) >$ d'un signal $|x(t)\rangle$ qui représente son énergie (cf Eq. 3.1) :

$$\begin{aligned}
< x(t)x(t) > &= \iint_{\mathbb{R}} a^*(s_1)a(s_2) < u(s_1)u(s_2) > ds_1ds_2 && (3.5)\\
&= \iint_{\mathbb{R}} a^*(s_1)a(s_2)\delta(s_1-s_2)ds_1ds_2 && (3.6)\\
&= \int_{\mathbb{R}} |a(s)|^2 ds && (3.7)\\
&= \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt && (3.8)
\end{aligned}$$

Ce résultat fondamental en traitement du signal montre que l'énergie d'un signal s'obtient dans le domaine temporel par (Eq. 3.8) ou dans une représentation quelconque qui peut être la représentation spectrale (Eq. 3.7).

Les deux représentations précédentes (temporelle et spectrale) des signaux sont les plus couramment utilisées. Elles résultent des propriétés des systèmes dans lesquels ces signaux sont élaborés mais aussi des hypothèses d'étude.

CHAPITRE 4

Propriétés énergétiques et spectrales des signaux

4.1 Définition des grandeurs énergétiques

4.1.1 Énergie et puissance physique

Considérons le circuit constitué d'une résistance R parcourue par un courant $I(t)$. L'énergie dissipée au cours de la durée T est

$$E_T = \int_T RI^2(t)dt = \int_T \mathcal{P}(t)dt, \tag{4.1}$$

où $\mathcal{P}(t)$ est la puissance dissipée par effet Joule à l'instant t. Avec la notation précédente, $I(t)$ représente le signal, et de ce fait la grandeur $\int_T I^2(t)dt$ est une grandeur proportionnelle à l'énergie.

Dans la réalité, un signal $x(t)$ peut avoir n'importe quelle dimension (unité) ; on posera de ce fait par convention et sans se soucier de leur dimension réelle et de leur unités :

- Energie : $\int_T x(t).x(t)dt$
- Puissance : $x(t).x(t)$

4.1.2 Définition des différentes puissances d'un signal

Dans le cas général, un signal peut être considéré complexe (appartenant à $\mathbb{C}$). On définit alors la puissance instantanée du signal par

$$\boxed{\mathcal{P}(t) = x(t).x^*(t)}, \tag{4.2}$$

et la puissance moyenne centrée en t_0 sur une durée T par

$$\boxed{\mathcal{P}(t_0, T) = \frac{1}{T}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} x(t).x^*(t)dt}, \tag{4.3}$$

et la puissance moyenne par

$$\boxed{\mathcal{P} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t).x^*(t)dt}. \tag{4.4}$$

4.1.3 Définition des différentes énergies d'un signal

L'énergie dans un intervalle de temps ΔT autour d'un instant t_0 est définie par

$$\boxed{\mathcal{E}(t_0, \Delta t) = \int_{t_0-\Delta T/2}^{t_0+\Delta T/2} \mathcal{P}(t)dt}, \tag{4.5}$$

alors que l'énergie totale considère le signal sur tout son domaine d'existence, *i.e.*

$$\boxed{\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(t)dt}, \tag{4.6}$$

4.1.4 Définition des différentes énergies d'interaction entre deux signaux

Par analogie, on peut définir les énergies et puissances croisées entre deux signaux $x(t)$ et $y(t)$. Ces quantités rendent compte d'une l'interaction liée à une dépendance physique des signaux entre eux. On définit alors les puissances d'interaction par

$$\boxed{\mathcal{P}_{xy}(t) = x(t).y^*(t)}, \tag{4.7}$$

$$\boxed{\mathcal{P}_{yx}(t) = y(t).x^*(t)}, \tag{4.8}$$

les énergies d'interaction par

$$\boxed{\mathcal{E}_{xy} = \int \mathcal{P}_{xy}(t)dt = \int x(t).y^*(t)dt}, \tag{4.9}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{yx} = \int \mathcal{P}_{yx}(t)dt = \int y(t).x^*(t)dt}. \tag{4.10}$$

Pour les signaux non limités dans le temps, on parlera de puissance moyenne d'interaction

$$\mathcal{P}_{yx} = \frac{1}{T} \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} y(t).x^*(t)dt, \tag{4.11}$$

s'il s'agit de signaux à puissance moyenne finie.

4.2 Spectres des signaux

4.2.1 La Transformée de Fourier (TF)

Pourquoi la Transformée de Fourier ?

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'un signal peut se décomposer selon un très grand nombre de bases, orthogonales ou non. De la même manière qu'un vecteur peut se décomposer suivant les différentes bases associées aux coordonnées cartésiennes, sphériques, cylindriques, etc. Concernant les signaux, l'une d'entre elles est la décomposition en fonctions sinusoïdales, ou harmoniques. Pourquoi cette décomposition est-elle si importante ?

La réponse est la suivante : on a choisi une décomposition en éléments sinusoïdaux ($|e^{2j\pi\nu t}>$) parce que ces éléments sont les fonctions propres des filtres linéaires :

$$L|e^{2j\pi\nu t}>= \lambda|e^{2j\pi\nu t}>, \tag{4.12}$$

c'est-à-dire qu'une telle fonction n'est pas déformée (spectralement) par le passage dans un filtre. Les filtres linéaires préservent ainsi le contenu spectral d'un signal : les fréquences en entrée se retrouvent également en sortie.

La transformation de Fourier, en tant qu'opération mathématique possède également une réalité physique dans l'analyse du signal. Cette réalité est plus intuitivement abordable dans certains domaines de la Physique comme la théorie de la diffraction en optique (de Fourier) ou l'interprétation de la diffraction des rayons X par les cristaux (cristallographie). La TF est donc physiquement accessible et possède ainsi une réalité physique.

Les fréquences négatives

La TF fait intervenir non seulement les fréquences ν positives mais également les fréquences négatives. Les fréquences négatives ne sont pas toujours (sauf en optique) accessibles à la mesure. Par exemple, les analyseurs de spectre ne donnent les grandeurs que pour les fréquences positives. Il y a donc une contradiction qui n'est qu'apparente. En effet, lorsqu'un

système calcule la transformée de Fourier d'une fonction physique, il opère sur une fonction réelle (les seules accessibles directement à la mesure) donc sans composante imaginaire. On peut donc, du fait de la symétrie hermitique de la TF calculée (ou mesurée), accéder par symétrie au prolongement de cette TF pour les fréquences négatives.

4.2.2 Classification fréquentielle et temporelle des signaux

Nous avons jusqu'a présent classé les signaux par rapport à leurs propriétés énergétiques. mais il existe également des "classements" ou plutôt "dénominations" selon leur répartitions temporelles ou selon leur spectre : les deux classifications étant proches l'une de l'autre.

Classification temporelle

- durée limitée : support $[a, b]$
- durée illimitée
  - à énergie finie
  - à puissance moyenne finie : périodique ou non périodique
  - causaux : $f(t) = 0$ si $t < 0$

Classification fréquentielle

Compte tenu de la symétrie hermitienne de la TF (du moins lorsque $f(t)$ est réelle), beaucoup de spectres auront une allure relativement symétrique (du moins en module), nous verrons presque toujours apparaitre les fréquences négatives. Le spectre sera alors en général défini par sa largeur de bande.

La largeur de bande B d'un signal est le domaine spectral des fréquences (positives ou négatives) occupées par son spectre. Elle est définie par la relation

$$B = f_2 - f_1, \tag{4.13}$$

avec $0 \leq f_1 < f_2$ où f_1 et f_2 sont des fréquences caractéristiques dénotant respectivement les limites inférieures et supérieures prises en compte. Les limites sont, en général, définies à -3 dB du maximum (Voir Fig.4.1) Une autre catégorie de signaux occupe une position particulière bien qu'ils n'aient aucune existence physique. Ce sont les signaux analytiques : equivalents fréquentiels des signaux causaux : aucune fréquence négative. Ils sont utilisés dans les d'algorithmes de démodulation numérique.

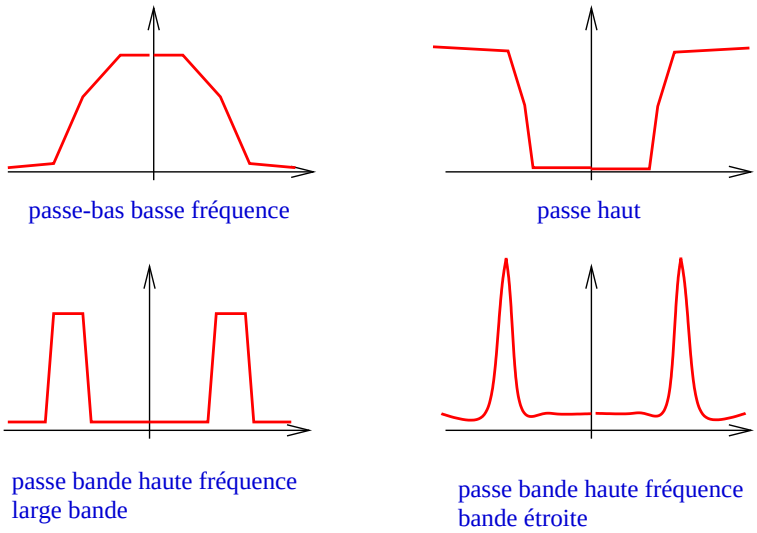


FIGURE 4.1 – *Quelques exemples de signaux caractérisés par la largeur de bande*

Durée d'un signal et largeur de spectre

La question qui peut se poser facilement est la suivante : peut on avoir simultanément un signal de durée limitée ayant également son énergie répartie sur une bande de fréquence. Pour cela considérons la fonction porte définie en (2.64). Un calcul de la TF montre que

$$s(t) = \Pi_T(t/T) \mapsto S(\nu) = \frac{\sin \pi\nu T}{\pi\nu T}. \tag{4.14}$$

Si on appelle ν_M la fréquence telle que $\forall\nu\ |\nu| > \nu_M$, $S(\nu) = 0$, l'intervalle $[-\nu_M, \nu_M]$ définit la bande du signal. On dira aussi que le signal est de largeur ν_M. On voit ainsi que le signal porte (de largeur T) possède une bande spectrale infinie.

En généralisant, on peut montrer qu'un signal ayant un spectre borné est nécessairement d'une durée infinie.

Durée utile et largeur spectrale utile d'un signal : relation de Heisenberg

Ce résultat concerne les signaux à énergie finie. On définit la durée utile D_u d'un signal par la relation

$$D_u^2 = 4\sigma_t^2 = 4 < t^2 >= 4\frac{1}{E}\int_{\mathbb{R}} t^2|x(t)|^2 dt, \tag{4.15}$$

qui s'interprète comme l'écart quadratique moyen du temps, et qui s'interprète comme étant le temps moyen d'un signal pour avoir l'essentiel de son information.

De même, on définit la largeur de bande utile B_u d'un signal par la relation

$$B_u^2 = \sigma_f^2 =< f^2 >= \frac{1}{E}\int_{\mathbb{R}} f^2|X(f)|^2 df, \tag{4.16}$$

qui s'exprime comme l'écart quadratique moyen de la fréquence .

Relation d'Heisenberg On peut montrer que le produit $B_u.D_u$ vérifie la relation d'incertitude dite de Heisenberg (analogie avec la physique quantique ! ! !) :

$$\sigma_f.\sigma_t \geq \frac{1}{4\pi}. \tag{4.17}$$

Il en résulte que le produit "durée $\times$ largeur de bande" est borné inférieurement. On pourra montrer (voir TD) qu'il est minimal dans le cas de l'impulsion gaussienne.

Exemple

Soit une horloge de fréquence proche de 1 MHz que l'on utilise pendant 1 seconde. On ne pourra pas avoir une précision Δf sur cette fréquence supérieure à $\Delta f = \frac{1}{4\pi}$, soit une précision relative de 0.3 ppm.

4.2.3 Les signaux à énergie finie

Définitions des spectres d'amplitude et de phase

Comme nous l'avons déjà défini, un signal à énergie finie possède la propriété suivante :

$$\mathcal{E} = \int_T |x(t)|^2 dt < \infty. \tag{4.18}$$

En revanche, l'énergie totale finie implique que ces signaux aient un comportement transitoire. Puisqu'ils sont à support borné, tous ces signaux possèdent une transformée de Fourier :

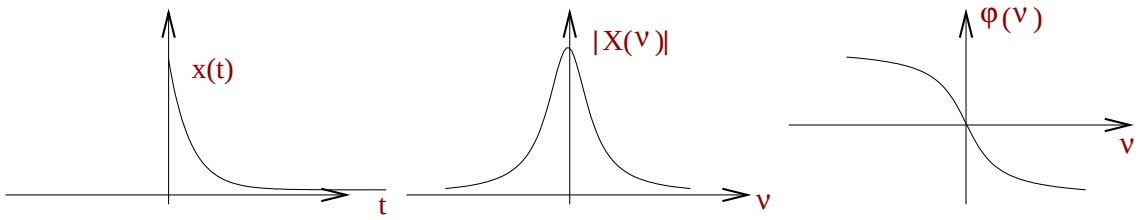


FIGURE 4.2 – *Représentation temporelle (a), spectre d'amplitude (b) et de phase (c) d'un signal à décroissance exponentielle*

$$X(\nu) = TF[x(t)] = |X(\nu)|e^{j\phi(\nu)}, \tag{4.19}$$

où $|X(\nu)|$ est appelé spectre d'amplitude (exprimé en Volts/Hz si x est en Volts) et $\phi(\nu)$ est le spectre de phase en radian.

Exemple : considérons le signal à décroissance exponentielle (Fig.4.2) $x(t) = \exp(-at)$. On a

$$x(t) = \exp(-at) \Rightarrow X(\nu) = \frac{1}{a + 2j\pi\nu}, \tag{4.20}$$

et

$$|X(\nu)| = (a^2 + (2\pi\nu)^2)^{-1/2} \quad \phi(\nu) = -\arctan(2\pi\nu/a). \tag{4.21}$$

Théorème de Parseval Plancherel

Démontré dans le cas général au paragraphe 3.5, dans le cas des signaux à énergie finie, il s'exprime par

$$\mathcal{E} = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |X(\nu)|^2 d\nu. \tag{4.22}$$

Ce théorème montre que l'énergie d'un signal peut être calculée soit dans la représentation temporelle, soit dans la représentation fréquentielle. L'énergie d'un signal est répartie dans le temps suivant la puissance instantanée $|x(t)|^2$ que l'on peut appeler "densité temporelle d'énergie" couramment appelée puissance du signal.

La relation de Plancherel-Parcheval suggère que cette énergie est répartie sur l'axe fréquentiel avec une **densité spectrale d'énergie (DSE)** donnée par

$$\gamma(\nu) = |X(\nu)|^2. \tag{4.23}$$

A titre d'exercice, on peut montrer que cette DSE est invariante par translation temporelle. Ceci montre l'intérêt de l'utilisation de la représentation spectrale des signaux.

Fonction d'autocorrélation

On définit la fonction d'autocorrélation par :

$$\gamma_{xx}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)x^*(t-\tau)dt, \tag{4.24}$$

et pour le cas particulier des signaux périodiques de période T, elle est définie que sur une période de $2T$ par

$$\gamma_{xx}(\tau) = \frac{1}{2T}\int_0^{2T} x(t)x^*(t-\tau)dt, \tag{4.25}$$

Cette fonction possède également la symétrie hermitienne, *i.e.*

$$\gamma_{xx}(-\tau) = \gamma_{xx}^*(\tau) \tag{4.26}$$

Si $x(t)$ est réel (signal temporel), la fonction d'autocorrélation est paire. Le module de la fonction d'autocorrélation est bornée par l'énergie du signal.

Intérêt de la fonction d'autocorrélation : la corrélation introduit la notion de cohérence , c'est-à-dire le lien (ou vraissemblance) existant entre deux signaux. Ces notions sont fondamentales en optique : les franges d'interférence sont données par la fonction d'autocorrélation de la source lumineuse.

Fonction d'intercorrélation

De même que l'autocorrélation est l'étude de la cohérence d'un signal avec lui même, l'intercorrélation mesure la ressemblance entre deux signaux différents. Elle est définie par

$$\gamma_{xy}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t-\tau)dt. \tag{4.27}$$

On peut montrer que

$$\gamma_{xy}(\tau) = \gamma^*_{yx}(-\tau). \tag{4.28}$$

4.2.4 Les signaux à puissance moyenne finie

Pour les signaux à puissance moyenne finie, on défini la densité spectrale de puissance (DSP) par

$$|X_T(\nu)|^2/T, \tag{4.29}$$

où $X_T(\nu)$ est la transformée de Fourier du signal défini sur une période T. On préférera considérer la DSP pour ces signaux à puissance finie (mais énergie infinie) comme les signaux périodiques, les signaux constants. Le spectre est donc un spectre de puissance.

4.2.5 Cas particulier des signaux périodiques

Bien qu'ils appartiennent à la classe des signaux à puissance moyenne finie, les signaux périodiques constituent une sous-classe particulièrement importante à cause de l'omniprésence de ces signaux et qu'en outre $exp(2j\pi\nu t)$ est une fonction propre des filtres linéaires.

Un signal périodique peut être reconstruit en partant d'un motif définit sur une période et de translations successives d'une quantité T correspondant à la période du signal.

En utilisant la notion de convolution, on peut écrire (cf Eq. 2.68)

$$f(t) = f_T(t) * \sqcup\!\sqcup_T(t), \tag{4.30}$$

et par transformation de Fourier :

$$F(\nu) = F_T(\nu).\frac{1}{T}\sum_n \delta(\nu - n/T) = \sum_n \frac{F_T(\nu)}{T}\delta(\nu - n/T) = \sum_n \frac{F_T(n/T)}{T}\delta(\nu - n/T). \quad (4.31)$$

La fonction $\frac{F_T(\nu)}{T}$ est appelée **enveloppe spectrale** du poids des raies. Hormis le facteur multiplicatif $1/T$, cette enveloppe ne dépendra que de la forme de la période principale du signal.

Dans le cas d'un signal périodique $x(t)$, la densité spectrale de puissance s'écrit très souvent sous la forme

$$S(\nu) = \left|X(\nu)\right|^2, \quad (4.32)$$

où $X(\nu)$ est la TF de $x(t)$.

Fonction sinusoïdale

Considérons une fonction sinusoïdale classique (Fig.4.3).

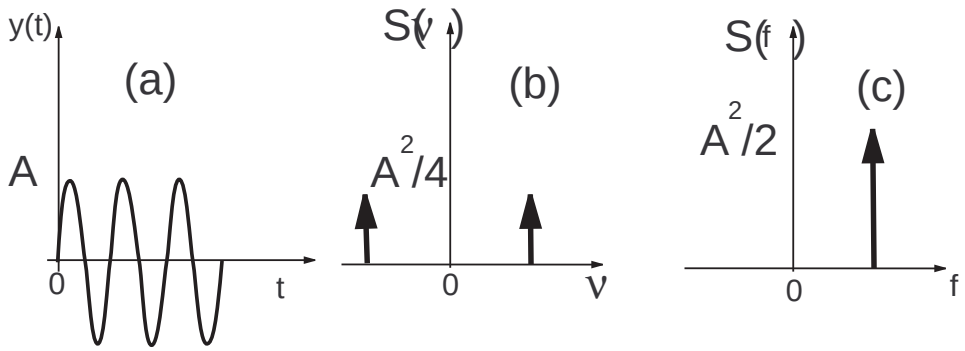


FIGURE 4.3 – *Propriétés temporelle (a) et spectrales : densité spectrale $S_y(\nu)$ bilatérale (b) et $S_y(f)$ unilatérale (c) de puissance*

Dans ce cas très simple, la densité spectrale de puissance unilatérale $S_y(f)$ est égale à la puissance totale du signal périodique, à savoir $A^2/2$

Suite d'impulsions rectangulaire

Considérons une suite d'impulsions rectangulaires (Fig.4.4). Dans ce cas, on a :

$$s(t) = s_T(t) * \sqcup\!\sqcup_T(t) \quad \Rightarrow S(\nu) = \frac{\sin \pi\nu\tau}{\pi\nu\tau}\frac{1}{T}\sum_n \delta(\nu - n/T) \quad (4.33)$$

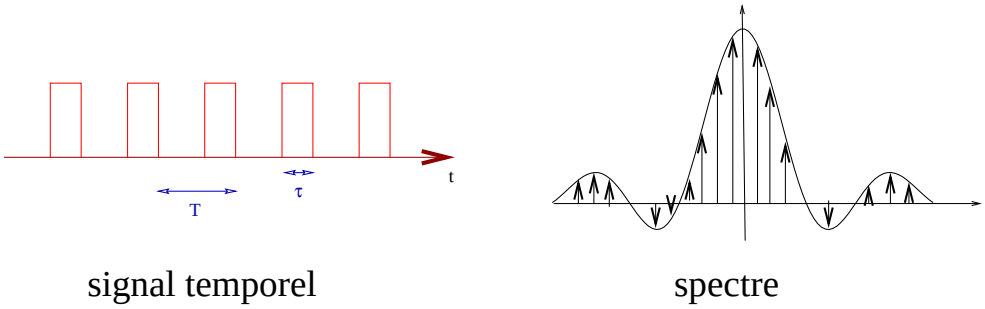


FIGURE 4.4 – *Propriétés temporelle et spectrale d'une suite d'impulsions rectangulaires*

CHAPITRE 5

Échantillonnage

BERTRAND RICQUE-VANDERLANDE
"Il y a trop d'à peu près dans la réalisation des applications d'automatismes" p.34

Mensuel
N° 76 - Décembre 2003
Prix : 12,20 € - ISSN 0755-219

Le magazine de l'instrumentation et des automatismes industriels

mesures

INSTRUMENTATION
Visual Studio.Net facilite la programmation p.44

GESTION DE PARC
15 000 appareils gérés par un seul logiciel p.48

VISION INDUSTRIELLE
Vos huîtres seront bien calibrées p.51

GUIDE D'ACHAT
Le motion control p.57

LA QUALITÉ DU SIGNAL RESTITUÉ EN DÉPEND
Oscilloscopes : attention à l'échantillonnage... p. 38

FIGURE 5.1 – *Revue Mesures, Dec 2003*

Les signaux primaires porteurs d'information sont pratiquement toujours de type analo-

gique (amplitude et temps continus). Un système d'acquisition ou tout autre système numérique traite des données, c'est-à-dire des suites de nombres. Il faut donc représenter le signal par une suite de valeurs ponctuelles : c'est l'échantillonnage.

On parle d'échantillonneur **régulier** ou périodique lorsque les prélèvements sont effectués selon un rythme régulier. L'intervalle T_e entre deux échantillons successifs est appelé pas d'échantillonnage et $F_e = 1/T_e$ fréquence d'échantillonnage.

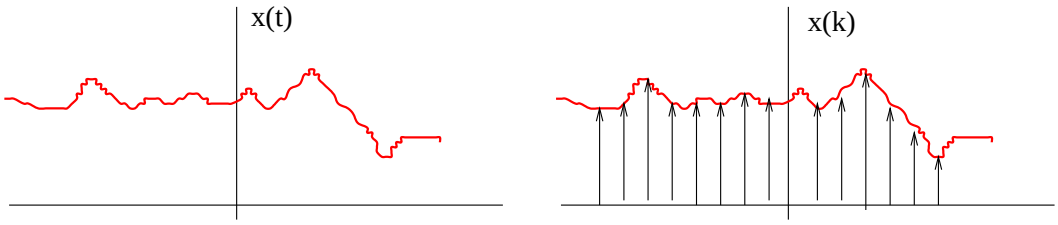


FIGURE 5.2 – *Signal réel et signal échantillonné*

5.1 Représentation d'un signal échantillonné idéal

Le signal échantillonné $x(k)$ tracé en Fig.5.2 est, dans la représentation des signaux, de puissance et d'énergie nulle. On préférera la représentation utilisant les impulsions de Dirac. Il est important de noter qu'il n'y a pas d'égalité entre le signal continu et le signal échantillonné : il s'agit d'une représentation.

Le signal échantillonné s'écrit alors

$$x_e(t) = \sum_n x(nT_e)\delta(t - nT_e), \tag{5.1}$$

et en utilisant le fait que

$$x(nT_e)\delta(t - nT_e) = x(t)\delta(t - nT_e) \tag{5.2}$$

on obtient alors la représentation temporelle du signal échantillonné

$$\boxed{x_e(t) = \sum_n x(t)\delta(t - nT_e) = x(t).\sqcup\!\!\sqcup_T(t).} \tag{5.3}$$

Le spectre du signal s'obtient en utilisant la relation (2.67), *i.e.*

$$x_e(t) = \sum_n x(t)\delta(t - nT_e) \Rightarrow X_e(\nu) = X(\nu) * F_e \sum_p \delta(\nu - p/T_e) = F_e \sum_p X(\nu - p/T_e) \tag{5.4}$$

5.2 Fréquence de Nyquist et critère de Shannon

Pour que le signal ait un intérêt physique, il faut que le signal échantillonné ait un spectre très proche de celui du signal analogique de départ ; et qu'à partir des échantillons, on puisse le reconstituer. Or d'après la figure Fig.5.3, on constate que la reconstitution du signal impose une condition sur la fréquence d'échantillonnage F_e. Le recouvrement des spectres "overlap-

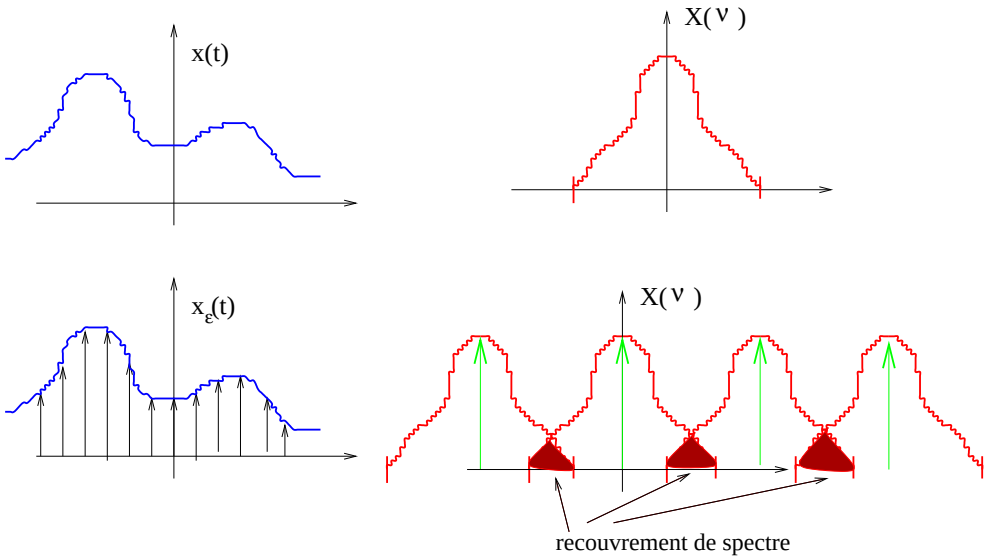


FIGURE 5.3 – *Reconstitution de spectre avec recouvrement*

ping ou repliement de spectre" conduit à une déformation du spectre. La condition pour que ce recouvrement soit absent repose sur le fait que le signal doit posséder un spectre qui s'étend de $-F_m$ à F_m avec $F_e \geq 2F_m$. A l'inverse, à F_e donné, il faut que $F_m < F_e/2$.

La fréquence $F_e/2$ est appelée **fréquence de Nyquist** et la condition d'échantillonnage est appelée **critère de Shannon**. La réalisation de ce critère est indispensable si l'on veut garantir un échantillonnage sans perte d'information

Exemple : fréquence d'échantillonnage d'un lecteur CD : 44 kHz > 2 fois la largeur du spectre des signaux audio.

5.3 Interpolation de Lagrange et théorème de Shannon

Plaçons nous dans le cas où la condition de Shannon est satisfaite ($F_e > 2F_m$). On doit donc pouvoir reconstruire le signal d'origine. La multiplication du spectre $X(\nu)$ par une porte de largeur F_e et d'amplitude $1/F_e$ permet de retrouver le spectre de départ, soit

$$X(\nu) = X_e(\nu)\frac{1}{F_e}\Pi_{1/T_e}(\nu) = F_e\sum_p X(\nu - p/T_e).\frac{1}{F_e}\Pi_{1/T_e}(\nu), \tag{5.5}$$

et par TF inverse

$$x(t) = \sum_n x(nT_e)\delta(t - nT_e) * \frac{\sin \pi F_e t}{\pi F_e t}, \tag{5.6}$$

car

$$\frac{1}{F_e}\Pi_{1/F_e}(\nu) \rightleftharpoons \frac{\sin \pi F_e t}{\pi F_e t}. \tag{5.7}$$

Ainsi le signal continu initial $x(t)$ peut s'écrire sous la forme

$$\boxed{x(t) = \sum_n x(nT_e)\frac{\sin \pi F_e(t - nT_e)}{\pi F_e(t - nT_e)}.} \tag{5.8}$$

On peut donc reconstituer le signal à partir de ses échantillons pourvu que la fréquence d'échantillonnage soit supérieure ou égale à deux fois la plus haute fréquence contenue dans le spectre : c'est l'interpolation de Lagrange.

Le théorème de Shannon s'énonce ainsi : un signal analogique $x(t)$ ayant un spectre s'étendant jusqu'a la fréquence limite F_{max} est entièrement décrit par la suite complète de ces valeurs instantanées $x(nT_e)$ prélevées à intervalles réguliers de durée T_e supérieurs ou égaux à $1/(2F_{max})$.

Remarque intéressante : Le théorème de Shannon montre qu'il existe une base de décomposition d'un signal formée par les fonction $\frac{\sin x}{x}$.

5.4 Exemples d'échantillonneurs

5.4.1 Echantillonneurs moyenneurs

La génération d'une impulsion idéale étant physiquement difficilement réalisable, l'échantillonnage est alors réalisé par une impulsion de largeur finie θ et on considère la valeur moyenne de $x(t)$ pendant la durée de l'impulsion. On a alors

$$x(nT_e) = \frac{1}{\theta}\int_{nT_e-\theta/2}^{nT_e+\theta/2} x(t)dt, \tag{5.9}$$

qui peut s'écrire

$$x(nT_e) = \frac{1}{\theta}\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_\theta(t - nT_e)x(t)dt = \frac{1}{\theta}\Pi_\theta(t) * x(t)\Big|_{t=nT_e}. \tag{5.10}$$

On peut donc écrire la fonction échantillonnée :

$$x_e(t) = \frac{1}{\theta}\Pi_\theta(t) * x(t).\sum_k \delta(t - kT_e), \tag{5.11}$$

d'où, en prenant la TF des deux membres,

$$X_e(\nu) = \underbrace{X(\nu).\frac{\sin \pi\nu\theta}{\pi\nu\theta}} * F_e \sum_k \delta(\nu - k/T_e). \tag{5.12}$$

Tout se passe ainsi comme si $X(\nu)$ était remplacée par :

$$X_1(\nu) = X(\nu).\frac{\sin \pi\nu\theta}{\pi\nu\theta}, \tag{5.13}$$

conduisant ainsi à une déformation du signal par une atténuation. Une perte d'information est donc la conséquence de cet échantillonnage et implique donc la nécessité d'avoir un θ le plus faible possible pour que le $\frac{\sin \pi\nu\theta}{\pi\nu\theta}$ soit le plus large possible. De plus le spectre est périodisé et la présence de ce filtrage supplémentaire introduit une erreur dans l'interpolation de Shannon

CHAPITRE 6

Signaux numériques

6.1 Définitions

On appelle signal numérique la suite de nombres $\{x(n)\}$ ou $\{x_n\}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ dans le cas général, $n \in \mathbb{N}$ dans le cas des signaux causaux. Cette suite de nombres provient en général de l'échantillonnage d'un signal analogique issu d'un système à caractériser.

Dans le cas où le signal numérique provient d'un échantillonnage, deux valeurs successives correspondent à un écart temporel de T_e. Ces signaux sont également appelés **signaux à temps discret**.

De plus un opérateur numérique travaille sur des mots binaires de longueur finie. Les valeurs exactes seront tronquées. Il y a en réalité une double discrétisation : échantillonnage du temps et de l'amplitude (quantification).

Les signaux numériques formant un espace vectoriel, toutes les opérations relatives à cet espace sont possible, *i.e.*

- addition : $z_n = y_n + x_n$
- multiplication par un scalaire : $y_n = K.x_n$

6.2 Comparaison numérique analogique

Soient deux signaux analogiques $x(t)$ et $y(t)$ échantillonnés en $x(nT_e)$ et $y(nT_e)$ en des points identiques nT_e pour lesquels on peut définir les intégrales, la convolution, la corrélation... Comment se traduisent-elles pour les signaux numériques ?

6.2.1 Intégrale et moyenne

Dans le cas de signaux discrets, il faut remplacer le signe $\int$ par le signe somme $\sum$, et ainsi, les relations d'intégrale et de moyenne deviennent

$$\int_a^b x(t)dt \mapsto \sum_{k=n}^{k=m} x_k T_e \quad \text{où} \quad a = nT_e \,, b = mT_e, \tag{6.1}$$

et

$$\frac{1}{T}\int_a^b x(t)dt \mapsto \frac{1}{NT_e}\sum_{k=n}^{k=m} x(kT_e)T_e = \frac{1}{N}\sum_{k=n}^{k=m} x(kT_e), \tag{6.2}$$

où $N = m - n + 1$ pour tenir compte des deux extrémités du signal.

6.2.2 Convolution et corrélation

Dans le cas idéal d'une infinité d'échantillons, les relations donnant la convolution deviennent

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u)du \mapsto x_n * y_n = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x(kT_e).y((n-k)T_e)T_e, \tag{6.3}$$

et la corrélation

$$\gamma_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y^*(u-t)du \mapsto \gamma_{x_n y_n} = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x(kT_e).y^*((k-n)T_e)T_e, \tag{6.4}$$

6.2.3 Signaux particuliers

Parmi les signaux numériques les plus couramment rencontrés, on trouve

- l'échelon unité u_n avec $u_n = 0$ si $n < 0$ et $u_n = 1$ si $n \geq 0$
- impulsion de Dirac δ_n : elle doit être définie pour être l'élément neutre du produit de convolution (6.3) soit $x_n * \delta_n = \sum_k x(k)\delta(n-k) = x_n$ et toute les valeurs de $x(k)$ avec $k \neq n$ doivent être nulles. Il faut donc

$$\delta(n-k) = 0 \text{ si } n \neq k \text{ et } \delta(n-k) = 1 \text{ si } n = k. \tag{6.5}$$

On appelle souvent δ_{nk} le symbole de Kronecker

6.3 Algorithmes de Transformée de Fourier : TFD, FFT

Le calcul de la transformée de Fourier pose une problème lorsque l'on considère des signaux discrets, c'est-à-dire dans la majorité des cas puisque l'acquisition d'un signal nécessite un échantillonnage. Ce calcul s'effectuera donc par l'utilisation de l'algorithme de la Transformation de Fourier Discrète (TFD) dont une version plus rapide (FFT pour Fast Fourier Transform) a été proposé par Cooley et Tuckey en 1965.

6.3.1 Transformation de Fourier Discrète (TFD)

Compte tenu de l'importance de l'analyse spectrale en théorie des signaux, il était nécessaire de mettre au point un algorithme de calcul numérique de la transformée de Fourier à l'aide d'un signal échantillonné.

Définition de la TFD

Considérons $\tilde{x}(n)$ une séquence périodique sur N échantillons, et considérons la suite de Fourier discrète $X(k)$ donnée par

$$\boxed{X(k) \triangleq \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) w^{-kn}}, \tag{6.6}$$

où $w = e^{2j\pi/N}$.

Cette relation défini la Transformée de Fourier Discrète du signal échantillonné $\tilde{x}(n)$. Cette suite est périodique sur N car

$$X(k+N) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) w^{-kn} w^{-kN} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) w^{-kn}, \tag{6.7}$$

avec $w^{-Nn} = w^{(-N)n} = 1^n = 1$. La TFD inverse est également définie par

$$\boxed{\tilde{x}(n) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) w^{kn}.} \tag{6.8}$$

Ces deux TFD (inverse et directe) possèdent la propriété de périodicité.

Correspondance avec la Transformée de Fourier continue

Supposons que la suite $\tilde{x}(n)$ soit issue d'un échantillonnage de pas T_e sur un signal périodique de période $T_0 = NT_e$. Posons $t = nT_e$ et $\nu = k\nu_0$.

Exprimons la transformée de Fourier de la première période T du signal continu $x(t)$:

$$X(\nu) = \int_T x(t)e^{-2j\pi\nu t}dt, \tag{6.9}$$

et elle devient après double échantillonnage en t et ν :

$$X(k\nu_0) = \sum_0^{N-1} x(nT_e)e^{-2j\pi k\nu_0 nT_e}T_e, \tag{6.10}$$

en tenant compte du fait que $\nu_0 T_e = \frac{T_e}{T_0} = 1/N$.

On montre ainsi que

$$X(k) = T_e\tilde{x}(k), \tag{6.11}$$

ce qui veut dire que la Transformée de Fourier Discrète $\tilde{x}(k)$ du signal échantillonné correspond (à un facteur près T_e) à la discrétisation de la transformée de Fourier d'une période.

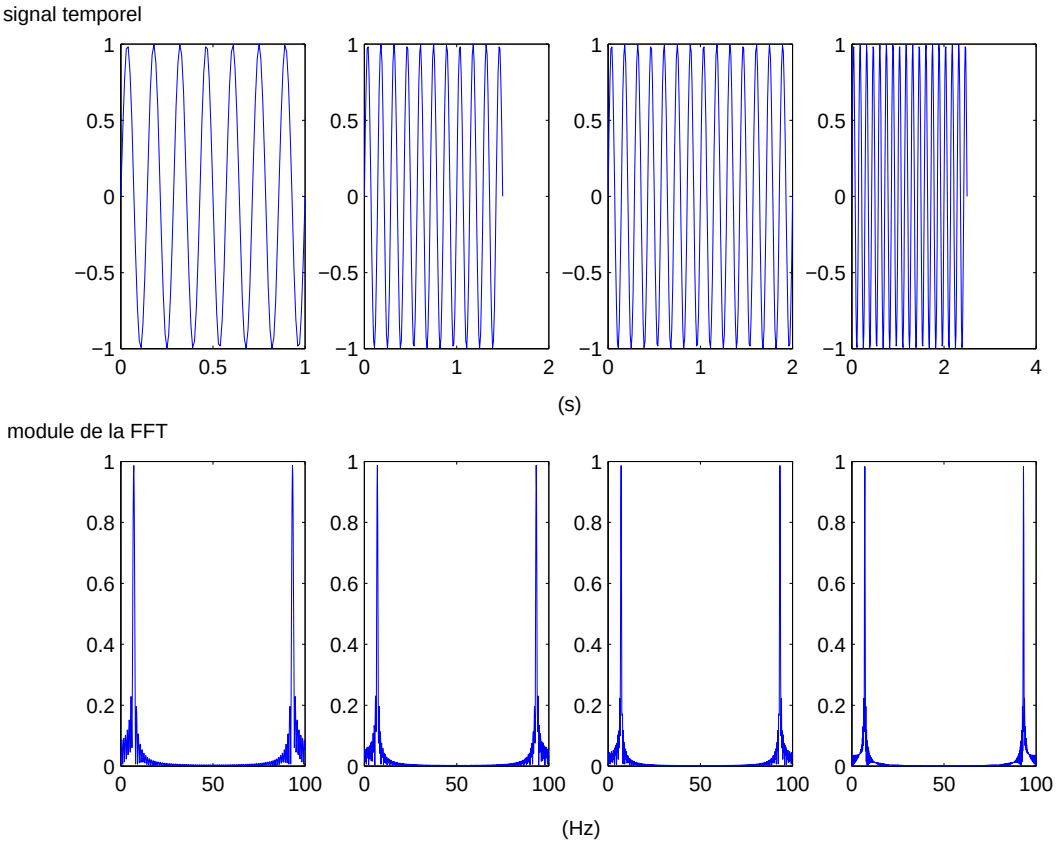


FIGURE 6.1 – *Propriétés de la FFT d'un signal sinusoïdal de fréquence 7 Hz, échantilloné à 100 Hz, en fonction du temps d'analyse. Attention, le spectre FFT n'est valable que de 0 à 50 Hz. La deuxième partie correspond en fait à la partie comprise entre -50 et 0 Hz.*

Sachant que la Transformée de Fourier discrète est périodique de période N, on ne sélectionne les composantes de $\tilde{x}(k)$ de 0 à $N-1$ ou plutôt, compte tenu de cette périodicité de $-N/2$ à $N/2-1$ (Fig.6.2).

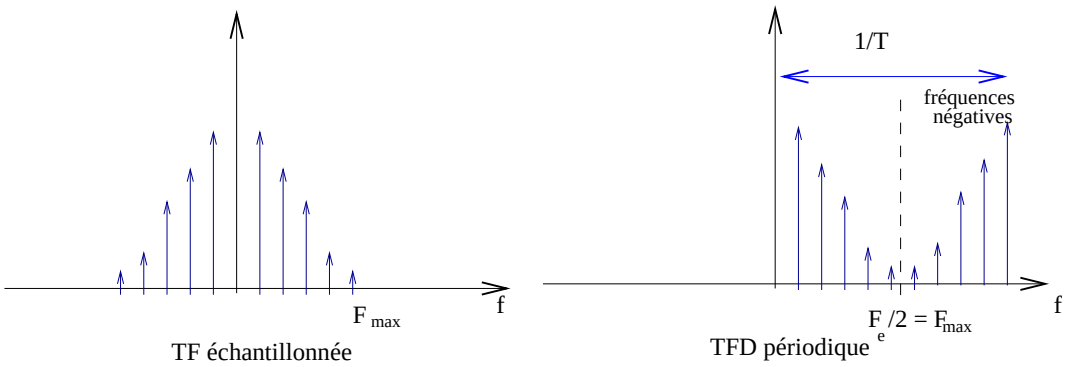


FIGURE 6.2 – *Propriétés du spectre FFT*

Les fréquences positives s'obtiennent de 0 à $N/2$ et les négatives de $N/2+1$ à $N-1$. Il se peut donc que les différents spectres se recouvrent mais, si l'échantillonnage est bien fait, $F_e = 1/T_e = 2F_m$. Or la fréquence maximale théorique obtenue par la TFD est $1/T_0 = \frac{1}{NT_e}$, et la moitié doit correspondre à la fréquence maximale dans le spectre idéal. Il ne doit donc pas y avoir de perte d'information spectrale.

Remarque importante : durée limité et bande limité sont en contradiction avec le principe d'incertitude. **Le spectre obtenu n'est donc qu'une approximation**.

6.3.2 Propriétés et généralités sur la FFT

C'est un algorithme permettant de diminuer le temps de calcul de la Transformée de Fourier Discrète. Il réduit le nombre de multiplications de N^2 à $(N/2)\log_2 N$. Le temps de calcul est réduit d'un facteur 372 pour une FFT de 800 lignes.

L'analyseur FFT est représenté en Fig.6.3. Cette fonction est désormais présente sur la plupart des oscilloscopes, analyseurs de spectres et analyseurs de réseau. Certains paramètres de réglages sont nécessaires pour une bonne utilisation de cette fonction (Fig.6.4).

Les applications de l'utilisation de l'option FFT d'un appareil sont multiples, comme l'évaluation des modes de résonance d'une structure ou d'un matériaux, de la fréquence d'apparition d'un phénomène temporel qui peut être physique, économique, industriel, biologique, etc. L'utilisation de la FFT est donc ainsi devenue quasi universelle et sa connaissance devient alors indispensable. D'ailleurs son importance ne cesse de croître de part son caractère indispensable dans les processus temps-réel.

6.3.3 Propriétés de la TFD ou de la FFT

Pour que cette transformée de Fourier discrète puisse correctement traiter les différents signaux numériques, il faut que toute les propriétés soient encore vérifiées et que les principales opérations telle la convolution, l'intercorrélation et les calculs d'énergie soient maitrisés (Tab.6.1).

Remarque importante : La relation de Parseval concernant la conservation de l'énergie (Tab.6.1) devient différente par l'utilisation de la TFD. En effet, un facteur N intervient. Concrètement le calcul de la FFT sur une fonction $\sin(x)$, devant donner un Dirac, peut faire apparaître un facteur N en amplitude.

6.3.4 Défauts de la TFD

La remarque ci-dessus peut également être considérée comme un piège de la TFD, mais il en existe de beaucoup plus préjudiciables. Ceux-ci peuvent se caractériser, une fois de plus, dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel à savoir :

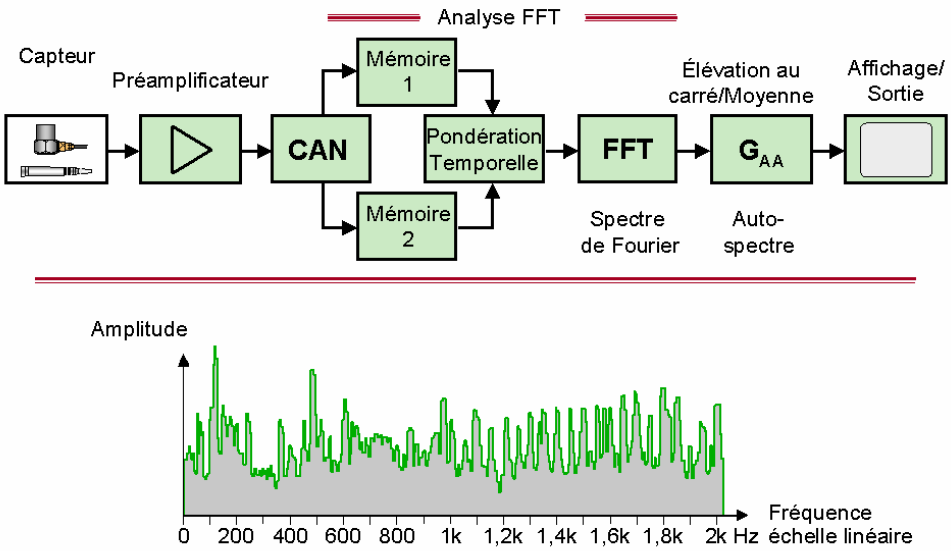


FIGURE 6.3 – *Diagramme Bloc de l'analyseur FFT*

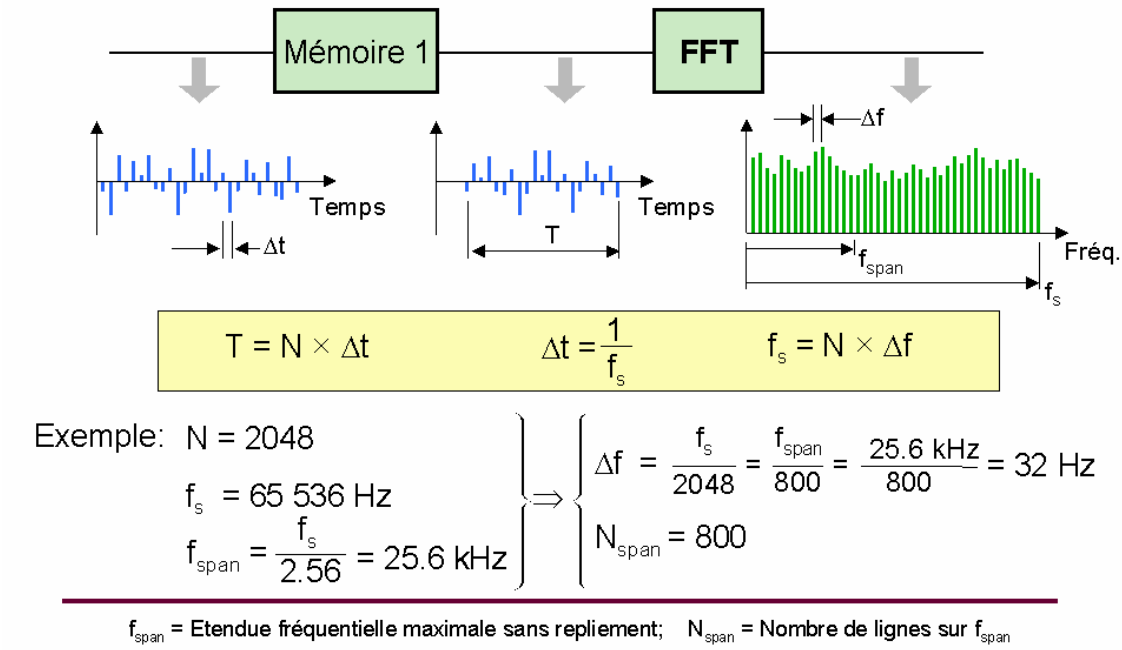


FIGURE 6.4 – *Paramètres temporels et fréquentiel de l'analyseur FFT*

Opération	Original	FFT ou TFD
	f_n, g_n	F_k, G_k
linéarité	$\alpha f_n + \beta g_n$	$\alpha F_k + \beta G_k$
conjugué	f_n^*	F_{-k}^*
translation	f_{n-i}	$F_k w^{-ik}$
	$f_n w^{in}$	F_{k-i}
Dirac	δ_n	1
	1	$N\delta_k$
convolution (circulaire)	$\sum_{i=0}^{N-1} f_i g_{n-i}$	$F_k.G_k$
	$f_n.g_n$	$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} F_i G_{k-i}$
corrélation (circulaire)	$\sum_{i=0}^{N-1} f_i g_{i-n}^*$	$F_k.G_k^*$
Parseval	$\sum_{i=0}^{N-1} \lvert f_i \rvert^2$	$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \lvert F_i \rvert^2$

TABLE 6.1 – *Propriétés de la Transformée de Fourier Discrète et de la FFT avec* $w = e^{2j\pi/N}$

Domaine temporel	Domaine fréquentiel
Echantillonnage	Repliement de spectre
Troncature temporelle	Effet de fuite (Fig.6.5)
Périodisation	Effet palissade (Fig.6.6)

Effet de fuite

Il s'agit de la conséquence de la troncature temporelle du signal à analyser. Il est très bien visible lorsque l'on considère des signaux périodiques (Figs.6.5).

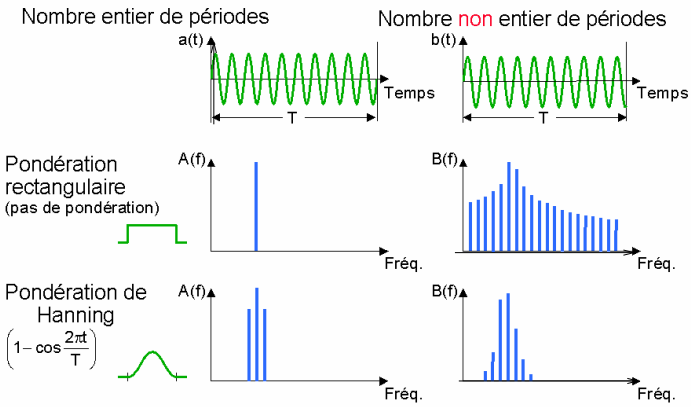


FIGURE 6.5 – *Effet de fuite dans le spectre FFT du à la troncature du signal temporel*

Effet palissade

Il s'agit encore d'une conséquence de l'échantillonnage. Le fait d'analyser le signal temporel à une période T_e nous limite dans la précision du spectre (Fig.6.6). Toute l'information (de haute fréquence) contenue entre chaque donnée temporelle sera cachée. Une absence de précision spectrale en est donc la conséquence.

6.3.5 Comment éviter les défauts de la TFD

- Retournement de spectre : utiliser un filtre anti-repliement (f_c) et une fréquence d'échantillonnage $f_s > 2f_c$
- Effet de fuite : utiliser la pondération adéquate pour traiter des signaux. Augmenter la résolution fréquentielle lorsque l'on traite les systèmes

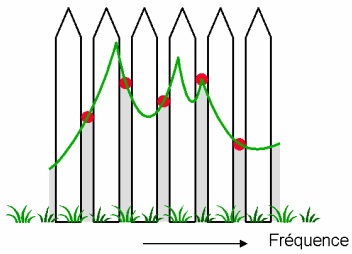


FIGURE 6.6 – *Effet palissade dans le spectre FFT du à la fréquence d'échantillonnage du signal temporel*

– Effet palissade : Utiliser une pondération adéquate (signaux). Augmenter la résolution fréquentielle (systèmes)

6.3.6 Notion de pondération - Fenêtrage

Pourquoi la pondération ?

Le contenu de la mémoire FFT représente une période d'un signal répété périodiquement. La pondération temporelle est destinée à éliminer les discontinuités au début et à la fin de l'enregistrement (Fig.6.7).

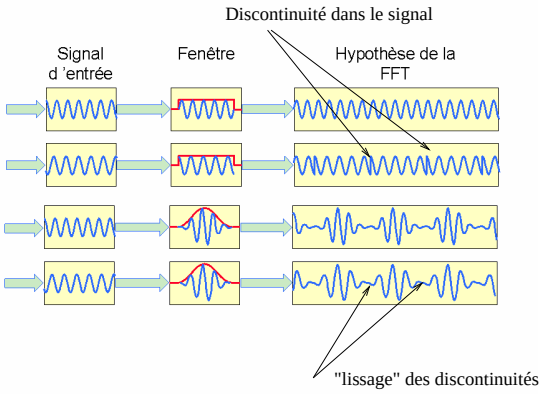


FIGURE 6.7 – *Effet de la fenêtre sur une discontinuité*

De plus les composantes fréquentielles du signal sont convoluées avec le spectre de la

pondération (équivalent à une caractéristique de filtre). Le spectre est échantillonné à des multiples de Δf de 1 à N(Fig.6.8).

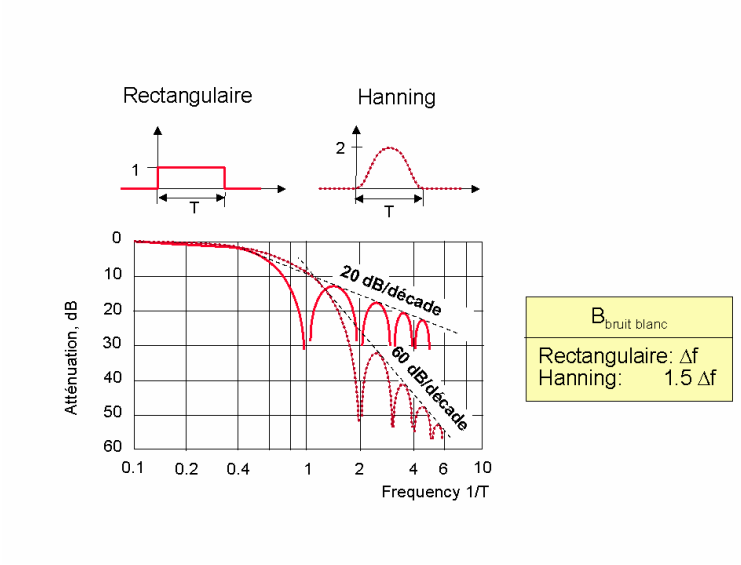


FIGURE 6.8 – *Le spectre FFT est convolué au spectre de la fenêtre de pondération*

Enfin, chaque ligne représente la sortie d'un ensemble filtre/détecteur centré sur les lignes FFT. Les caractéristiques du filtre sont déterminées par la pondération (Fig.6.9). Il est donc nécessaire d'utiliser les fenêtres de pondération en fonction de leurs propriétés et de l'application de l'utilisation de la FFT. Pour une précision en amplitude et en ondulation du spectre, se référer au tableau Tab.6.2 et à la figure Fig.6.10, pour une précision en sélectivité, séparation de deux composantes proches, se référer au tableau Tab.6.3.

Pondération	B.P. de bruit	B.P.(3 dB)	Premier zéro	Ondulation
Rectangulaire	1.0 Δ_f	0.9 Δ_f	1.0 Δ_f	3.9 dB
Hanning	1.5 Δ_f	1.4 Δ_f	2.0 Δ_f	1.4 dB
Kaiser-Bessel	1.8 Δ_f	1.7 Δ_f	3.1 Δ_f	1.0 dB
Flat Top	3.8 Δ_f	3.7 Δ_f	5.0 Δ_f	0.01 dB

TABLE 6.2 – *Propriétés des fenêtres de pondération utilisées dans les algorithmes FFT : bande passante, précision en fréquence, ondulation, précision en amplitude*

Il existe d'autres pondérations adaptées à chaque fois au système ou au signal à analyser. Par exemple, l'étude d'un régime transitoire par une analyse FFT nécessitera une pondération exponentielle.

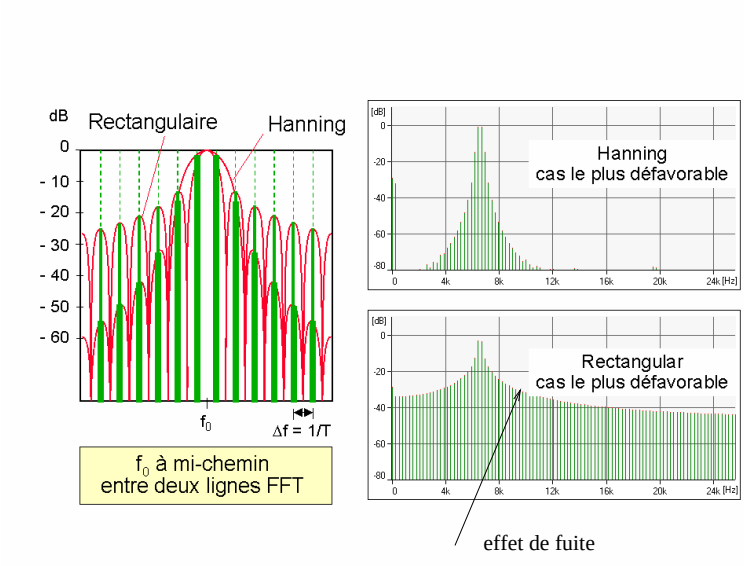


FIGURE 6.9 – *La position de la fenêtre de pondération par rapport aux lignes FFT pour engendrer un effet de fuite dans le spectre FFT*

Pondération	1er lobe sec.	décroissance des lobes	B.P.(60 dB)	Facteur de forme
Rectangulaire	- 13 dB	20 dB/dec	665 Δ_f	740
Hanning	- 31 dB	60 dB/dec	13.3Δ_f	9.5
Kaiser-Bessel	- 68 dB	20 dB/dec	6.1Δ_f	3.6
Flat Top	- 93 dB	0 dB/dec	9.1Δ_f	2.5

TABLE 6.3 – *Propriétés des fenêtres de pondération utilisées dans les algorithmes FFT : sélectivité, séparation de deux composantes proches*

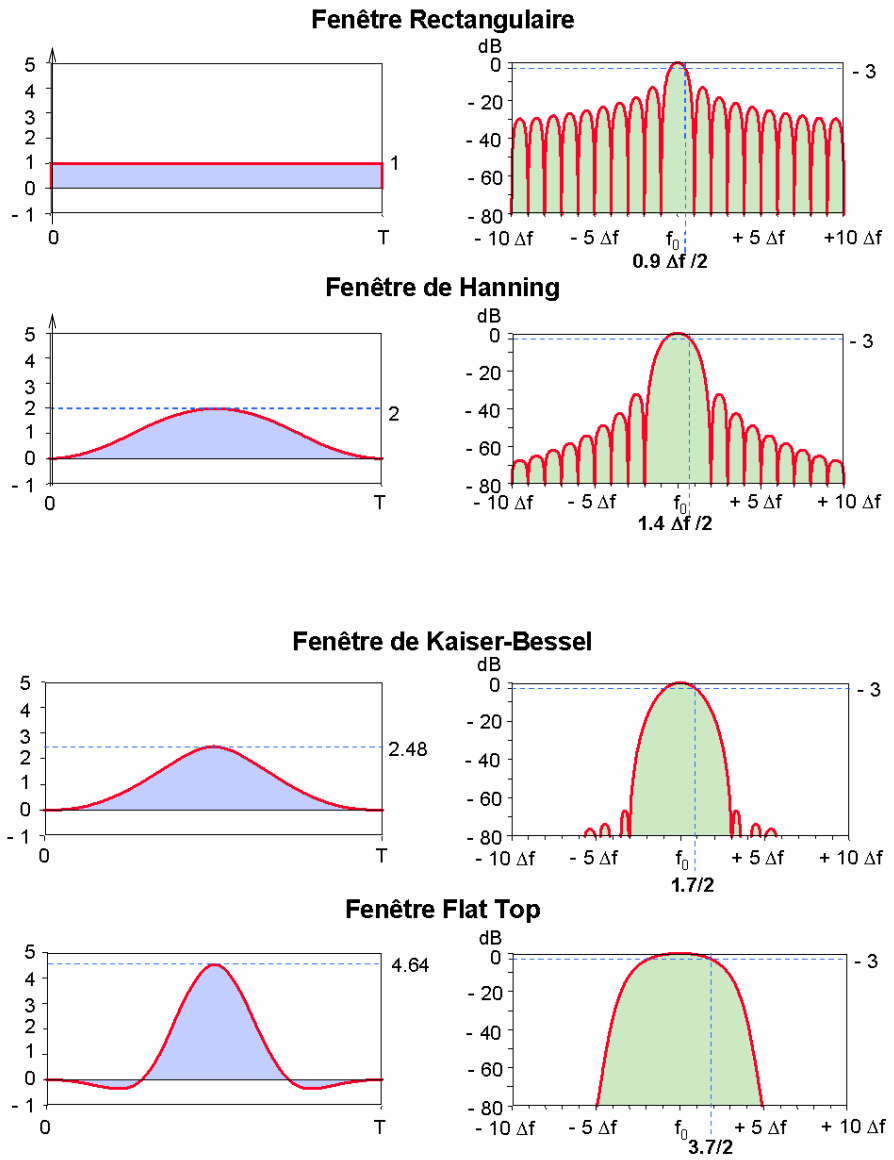


FIGURE 6.10 – *Propriétés des différentes fenêtres de pondération utilisées pour la FFT*

CHAPITRE 7

Les systèmes linéaires - Filtres

7.1 Définitions : linéarité, stationnarité

Si on considère l'espace des signaux $\mathcal{S}$ et une application f de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$, on dira que f est **linéaire** si

$$F(a|x> +b|y>) = aF(|x>) + bF(|y>). \tag{7.1}$$

Le système est dit **stationnaire** si les opérateurs F et T_τ (opérateur translation) commutent dans le temps (Fig.7.1), *i.e.*

$$F(T_\tau|x>) = T_\tau(F|x>). \tag{7.2}$$

Exemple : les filtres sont des systèmes linéaires et stationnaires.

En électronique et en automatique avancée apparaissent souvent des systèmes non linéaires. Cependant, on se ramène dans la majorité des cas [1] à l'étude des petites perturbations autour d'un certain régime de fonctionnement linéaire (cas du transistor par exemple). Cette

1. Dans les cas fortement non linéaires, il est évident qu'une autre démarche doit être adoptée.

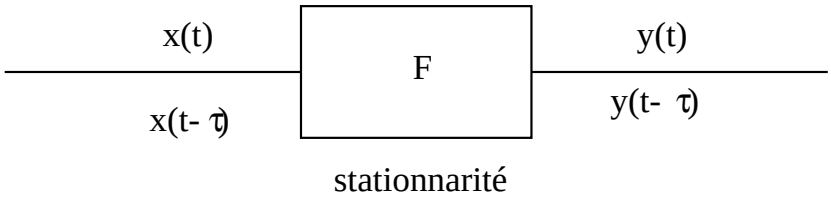


FIGURE 7.1 – *Système linéaire et invariance temporelle (stationnarité)*

procédure remplace une liaison entrée-sortie non linéaire par son développement à l'ordre 1 : c'est la linéarisation ou approche quasi-linéaire.

D'un point de vue général, tout système dans lequel la liaison entrée-sortie résulte d'une équation différentielle linéaire d'ordre N quelconque à coefficients constants est un système linéaire stationnaire (il suffit d'y effectuer un changement de variable).

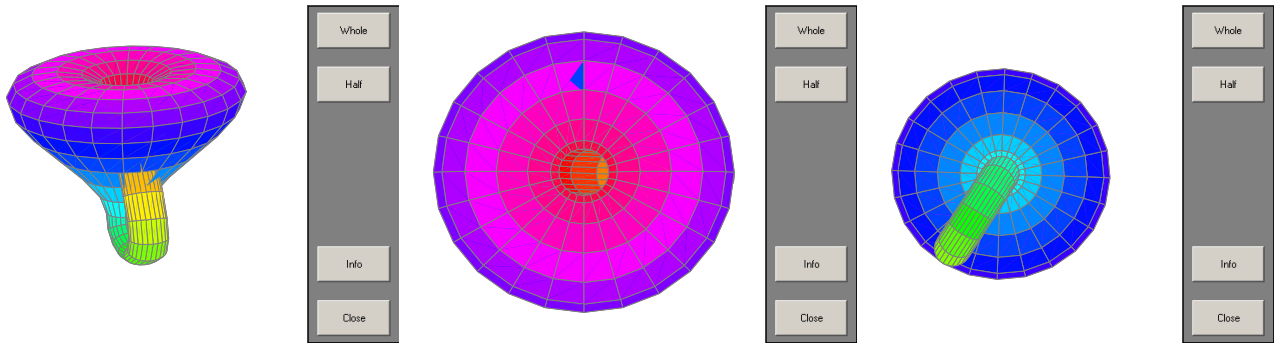
7.2 Représentations d'un système linéaire

7.2.1 Qu'est-ce qu'une représentation ?

Pour appréhender la notion très conceptuelle de la représentation d'un système, on peut regarder l'exemple très concret présenté en figure Fig.7.2. Il s'agit de représentations différentes du même signal audio. On a toujours intérêt de choisir la meilleure représentation du système que l'on veut observer. Ainsi, les trois représentations proposées en Fig.7.3 ne donnent pas la même information.

(a) (b) (c)

FIGURE 7.2 – *Trois types de représentation pour le même signal audio*



(a) (b) (c)

FIGURE 7.3 – *Trois représentations différentes de la bouteille de Klein*

7.2.2 Définition mathématique de la représentation

Considérons un opérateur F modélisant un système (physique ou électronique), et $|y >= F|x >$ l'action de F sur $|x >$. Notons également $y(s)$ et $x(v)$ les représentations s et v de $|x >$ et $|y >$ selon les bases orthonormées continues $|e(s) >$ et $|e(v) >$ de S, s et v pouvant être par exemple le temps. On peut donc écrire

$$|y > \;=\; \int_{\mathbb{R}} y(s)|e(s) > ds, \tag{7.3}$$

$$|x > \;=\; \int_{\mathbb{R}} x(v)|e(v) > dv, \tag{7.4}$$

et de ce fait le produit $|y >= F|x >$ donne

$$|y > \;=\; F\left[\int_{\mathbb{R}} x(v)|e(v) > dv\right], \tag{7.5}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} x(v)F[e(v)]dv. \tag{7.6}$$

Par ailleurs, les vecteurs étant orthonormés , on a $< e(s)|y >= y(s)$, et en remplaçant $|y >$ par la valeur ci-dessus, on obtient ce que l'on appelle $A(s, v)$: la projection sur $|e(s) >$ de la transformée F du vecteur de base $|e(v) >$ qui est défini par

$$A(s, v) =< e(s)|F|e(v) > . \tag{7.7}$$

La relation ci dessus constitue la **représentation mathématique d'un système linéaire**.

7.2.3 Représentation temporelle des systèmes linéaires

Considérons un système linéaire exprimé à partir d'une représentation temporelle $H_t(t, t')$ par :

$$y(t) = \int_{\mathbb{R}} H_t(t, t')x(t')dt' = F|x > . \tag{7.8}$$

Montrons que si le système linéaire est stationnaire, alors on a la propriété suivante :

$$H_t(t - \tau, t') = H_t(t, t' + \tau) \ \ \forall t, t', \tau. \tag{7.9}$$

En effet, si un opérateur F est stationnaire, l'équation (7.2) est vérifiée. Posons pour simplifier

$$|w >= T_\tau|x > \ ; \ \ |z >= F|w >= FT|x >, \tag{7.10}$$

alors

$$z(t) = \int_{\mathbb{R}} H_t(t, t')w(t')dt' = \int_{\mathbb{R}} H_t(t, t')x(t' - \tau)dt' \tag{7.11}$$

Si on change $t' - \tau$ en t', on obtient

$$z(t) = \int_{\mathbb{R}} H_t(t, t' + \tau)x(t')dt'. \tag{7.12}$$

Mais

$$y(t - \tau) = \int_{\mathbb{R}} H_t(t - \tau, t')x(t')dt', \tag{7.13}$$

et la condition de stationnarité appliquée à $z(t)$ doit donner $y(t - \tau)$ et de ce fait on montre le résultat (7.9). Le changement de signe de τ selon que τ se rattache à t' ou à t implique que $H_t(t, t') = h(t - t')$. Un système linéaire et stationnaire est donc caractérisé par une seule fonction du temps $h(u)$, soit :

$$\boxed{y(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t - t')x(t')dt'} \tag{7.14}$$

La sortie $y(t)$ de F est le produit de convolution de l'entrée $x(t)$ par $h(t)$ la représentation temporelle du système linéaire.

Si l'excitation $x(t)$ est une impulsion de Dirac $\delta(t)$, alors $y(t) = h(t)$ est appelée **réponse impulsionnelle** du système linéaire.

7.2.4 Représentation fréquentielle des systèmes linéaires

Considérons la représentation fréquentielle $X(\nu)$ et $Y(\nu)$ des deux signaux $x(t)$ et $y(t)$. La linéarité entraîne :

$$Y(\nu) = \int_{\mathbb{R}} A(\nu, \nu')X(\nu')d\nu'. \tag{7.15}$$

Si on exprime la stationnarité en considérant le signal $|z >= T_\tau|y >= T_\tau F|x >$, la relation $z(t) = y(t - \tau)$ donne

$$Z(\nu) = Y(\nu)e^{-2j\pi\nu\tau} = e^{-2j\pi\nu\tau} \int_{\mathbb{R}} A(\nu, \nu')X(\nu')d\nu'. \tag{7.16}$$

Appelons $|w >= F[T_\tau]$ la quantité qui doit être identique à $|z >$. On peut montrer que :

$$W(\nu) = \int_{\mathbb{R}} A(\nu, \nu')X(\nu')e^{-2j\pi\nu'\tau}d\nu'. \tag{7.17}$$

La stationnarité nécessite que $A(\nu, \nu')[e^{-2j\pi\nu'\tau} - e^{-2j\pi\nu\tau}] = 0$ soit :

$$A(\nu, \nu') = G(\nu)\delta(\nu - \nu'), \tag{7.18}$$

ce qui donne finalement l'expression suivante :

$$\boxed{Y(\nu) = \int_{\mathbb{R}} G(\nu)\delta(\nu - \nu')X(\nu')d\nu' = G(\nu)X(\nu).} \tag{7.19}$$

Un système linéaire et stationnaire est caractérisé dans le domaine fréquentiel par une fonction $G(\nu)$ appelée **gain complexe ou fonction de transfert** du système.

Relation entre le gain complexe et la réponse impultionnelle

En utilisant les relations (7.19) et (7.14), on montre le résultat important suivant

$$\boxed{TF\left(h(t)\right) \Longrightarrow G(\nu)}, \tag{7.20}$$

liant la réponse impultionnelle $h(t)$ d'un système et son gain complexe $G(\nu)$.

7.3 Détermination du gain complexe

7.3.1 Vecteurs propres de l'opération de convolution

Les signaux de base de la représentation fréquentielle sont les exponentielles éternelles $|e_\nu >$ de représentation temporelle $e^{2i\pi\nu t}$. On peut montrer que les exponentielles éternelles sont les "signaux propres" des système linéaires et stationnaires. Cette propriété fondamentale peut s'exprimer en disant que les systèmes linéaires et stationnaires conservent les fréquences.

ATTENTION : le opérateurs de changement de fréquence (modulation, démodulation, détection) doivent faire appel à des systèmes non linéaires ou non stationnaires.

7.3.2 Interprétation du gain complexe

En posant $H(\nu) = |H(\nu)|e^{j\Phi(\nu)}$, on montre que $|H(\nu)|$ est le rapport d'amplitude sortie-entrée lorsque F est excité par $|e_\nu >$ et que $\Phi(\nu)$ représente le déphasage sortie-entrée.

On peut montrer que si $x(t)$ est réel (souvent le cas en pratique), alors $h(t)$ est réel et le gain possède la propriété de symétrie hermitienne :

$$G(-\nu) = G^*(\nu), \tag{7.21}$$

et le module est pair et la phase est impaire.

7.4 Les filtres

Les filtres sont des systèmes linéaires que l'on peut classer suivant les propriétés spectrales ou temporelles.

Le filtrage "temporel" peut être considéré comme une atténuation du signal pendant une durée T. On peut alors écrire le signal de sortie comme étant par exemple :

$$g(t) = f(t).\Pi_T(t), \tag{7.22}$$

où $\Pi_T(t)$ est la fonction porte de largeur T. Cette opération engendre, dans le domaine spectral, une convolution de $F(\nu)$ et du sinus cardinal, transformé de Fourier de la porte.

Mais si on ne précise pas le type de filtre, il s'agit d'un filtrage "fréquentiel". Ce sont les systèmes linéaires les plus importants. Ils sont caractérisés par la relation fréquentielle

$$G(\nu) = F(\nu).H(\nu), \tag{7.23}$$

ou, dans le domaine temporel, par la relation de convolution suivante :

$$g(t) = f(t) * H(t). \tag{7.24}$$

7.4.1 Les filtres physiquement réalisables

Pour être physiquement réalisable, un filtre doit posséder une réponse impultionnelle possédant les propriétés suivantes :

- réelle
- causale
- stable

Seuls les signaux réels sont mesurables, donc la première condition devient évidente. Examinons les deux autres conditions :

7.4.2 Causalité

La condition de causalité provient du principe simple que **l'effet ne peut précéder la cause** qui le provoque. On peut l'exprimer en disant que pour une entrée

$$e(t) = 0 \text{ si } t < t_0, \tag{7.25}$$

on a une sortie

$$s(t) = 0 \text{ si } t < t_0. \tag{7.26}$$

On a vu que la réponse à tout signal s'exprime à partir d'une impulsion placée en $t = 0$. Il suffit donc d'imposer les conditions de causalité à la réponse impultionnelle, soit :

$$\boxed{F\text{causal} \quad \Leftrightarrow \quad h(t) = 0 \text{ si } t < 0.} \tag{7.27}$$

Rappelons que par les propriétés du produit de convolution, la réponse d'un système linéaire stationnaire à une excitation causale est également causale, ce qui explique la grande importance de la transformée de Laplace.

Remarque 1 : si la réponse impultionnelle a une durée temporelle limitée, le filtre est dit à réponse impultionnelle finie (RIF), sinon il est dit à réponse impultionnelle infinie (RII). Ces deux appellations étant surtout usitées pour les filtres numériques.

Remarque 2 : lorsque la variable intéressante est le temps (souvent le cas), les systèmes physiques réalisables sont effectivement causaux. Par contre, si on parle de filtrage spatial, par exemple en optique, cette condition n'est plus nécessaire. Il suffira alors que $h(t)$ soit réelle et stable.

7.4.3 Stabilité

La stabilité d'un filtre, possédant une évolution temporelle décrite par une équation différentielle linéaire à coefficient constant, peut se définir à partir des propriétés de sa fonction de transfert $H(\nu)$.

En effet, un système est stable si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle négative.

7.5 Exemples importants des systèmes linéaires

7.5.1 Amplificateur idéal

On doit avoir

$$H(\nu) = A \text{ soit } h(t) = A\delta(t), \tag{7.28}$$

ce qui est physiquement impossible à réaliser. Mais il peut constituer une bonne approximation avec $r(t) = A\delta(t) * e(t) = Ae(t)$.

7.5.2 Ligne à retard idéale

Une ligne à retard introduit un décalage temporel dans le signal $e(t)$, à savoir :

$$s(t) = e(t) * h(t) = e(t) * \delta(t - t_0) = e(t - t_0). \tag{7.29}$$

Ce filtre est physiquement réalisable si $t_0 > 0$. De même, un amplificateur retardé est physiquement réalisable.

7.5.3 Filtre passe-bande idéal

La fonction de transfert d'un filtre passe-bande idéal est de la forme

$$H(\nu) = \Pi_{2B}(\nu - \nu_0) + \Pi_{2B}(\nu + \nu_0), \tag{7.30}$$

qui donne pour réponse impultionnelle la fonction

$$h(t) = 2\cos 2\pi\nu_0 t.2B\frac{\sin 2\pi Bt}{2\pi Bt}, \tag{7.31}$$

se trouvant être non causale. En effet cette réponse impultionnelle est bien réelle mais non causale. Toutefois, on peut considérer que si l'on retarde la réponse de quelques $1/B$, $h(t)$ ne sera pas sensiblement différent de zéro pour $t < 0$.

7.5.4 Filtre passe-bas idéal

La fonction de transfert d'un tel filtre est donnée par :

$$H(\nu) = \Pi_{2B}(\nu), \tag{7.32}$$

qui donne pour réponse impultionnelle la fonction

$$h(t) = 2B\frac{\sin 2\pi Bt}{2\pi Bt}, \tag{7.33}$$

qui n'est pas causale. De la même façon que précédemment, il faut lui adjoindre une ligne à retard de quelques $1/B$ pour rendre ce filtre causal. Ce filtre sert à la reconstruction du signal à partir d'échantillons pris à $1/2B$ (ou lorsque le signal est à bande limitée $[-B, +B]$).

7.5.5 Filtres intégrateurs et dérivateurs

Pour avoir un filtre intégrateur, à une entrée $e(t)$ on fait correspondre $r(t)$ l'intégrale de $s(t)$ sur la durée $2T$, *i.e.*

$$r(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} e(t')dt'. \tag{7.34}$$

Ce filtre n'est pas causal, car sa réponse impultionnelle est du type porte de largeur $2T$ centrée en $t = 0$. En revanche, si l'on retarde l'intégration d'une quantité T, le filtre obtenu est réalisable.

Pour le filtre dérivateur, sa construction nécessite un système qui à $e(t)$ fait correspondre $r(t) = e'(t) = e(t) * \delta'(t)$. On montre (vu en théorie des distributions) que sa réponse impultionnelle est $h_D(t) = \delta'(t)$ et que le gain complexe est $H_D(\nu) = 2j\pi\nu$.

Troisième partie

Signaux Aléatoires

CHAPITRE 8

Rappels de statistique nécessaire au traitement des signaux

L'étude concrète des signaux physiques issus de systèmes à caractériser montre que ceux-ci ne peuvent simplement se décrire à partir de considérations déterministes, mais qu'ils doivent comporter un aspect aléatoire provenant de la méconnaissance de l'un des aspects suivants :

- modélisation du système : approche trop simplifiée, hypothèses trop grossières (linéarité, stationarité, etc.)
- effets connus mais non modélisables simplement de façon déterministe (influence de la température sur un système,...)
- paramètres et perturbations inconnus (? ? ? ?)

Dans ce cas, la considération des signaux peut se faire en caractérisant ceux-ci par leur propriétés aléatoires et leur évolution sera dictée par l'évolution probabiliste des propriétés.

8.1 Variables aléatoires - Moments - Fonctions caractéristiques

Il convient de rappeler quelques résultats relatifs à la théorie des probabilités.

Considérons un processus aléatoire ω décrit dans l'espace des épreuves Ω.
On appelle : variable aléatoire discrète, l'application de Ω dans $\mathbb{Z}$ définie par :

$$\Omega \longrightarrow \mathbb{Z} \tag{8.1}$$
$$\omega \longmapsto X(\omega) \in \mathbb{Z} \tag{8.2}$$

et variable aléatoire réelle, l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\Omega \longrightarrow \mathbb{R} \tag{8.3}$$
$$\omega \longmapsto X(\omega) \in \mathbb{R} \tag{8.4}$$

Soit $X(\omega)$ une variable aléatoire discrète (resp. réelle).
On appelle loi de X, la probabilité P_X définie sur $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{R}$) par la relation :

$$P_X(n) = P_X(X(\omega) = n) \tag{8.5}$$
$$(resp.\ P_X(]-\infty, x]) = P_X(X(\omega) \leq x) \tag{8.6}$$

Moments d'une variable aléatoire. Soit

$$X(\omega) : \Omega \longrightarrow E \quad E = \mathbb{R}\ ou\ \mathbb{N} \tag{8.7}$$
$$\omega \longmapsto X(\omega) = x \tag{8.8}$$

une variable aléatoire et soit $p_x = P(X(\omega) = x)$ sa loi. Si on suppose que la série $x^m p_x$ (resp. que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^m p_x dx$ est convergente), on appelle

$$E(X^m) = \sum_x x^m p_x \quad \left(resp.\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^m p_x dx \right), \tag{8.9}$$

le moment d'ordre m de X. Moyenne de X ou espérance de X

$$E(X) = \sum_x x p_x \ \ resp\ \ E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_x dx \tag{8.10}$$

Moment d'ordre 2

$$E(X^2) = \sum_x x^2 p_x \ \ resp\ \ E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_x dx \tag{8.11}$$

Variance

$$\sigma^2(x) = \sum_x (x - E(x))^2 p_x \ \ resp\ \ E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2 p_x dx \tag{8.12}$$

La racine carrée de $\sigma^2(x)$ est appelée écart-type de x. Si x a un moment d'ordre 2, on dit que x est de carré intégrable. Un signal temporel vérifiant cette propriété sera dit à "énergie finie".
Note :

Afin d'indifférencier l'aspect discret de l'aspect continu des variables aléatoires, on utilisera la notation $< | >$ (notation de Dirac) réservée aux vecteurs d'un espace de Hilbert :

$$E(X) =< x|p_x >\equiv \sum_x xp_x \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} xp_x dx, \tag{8.13}$$

de même

$$E(X^2) =< x^2|p_x >\equiv \sum_x x^2p_x \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x^2p_x dx. \tag{8.14}$$

On vérifie que :

$$\begin{aligned}
\sigma^2(x) &= < (x - E(x))^2|p_x > & (8.15)\\
&= < x^2 - 2xE(x) + E(x)^2|p_x > & (8.16)\\
&= < x^2|p_x > -2E(x) < x|p_x > +E(x)^2 < 1|p_x > & (8.17)\\
&= < x^2|p_x > -2E(x)E(x) + E(x)^2 & (8.18)\\
\sigma^2(x) &= E(x^2) - E(x)^2. & (8.19)
\end{aligned}$$

Notons la propriété de la loi de la probabilité p_x par $< 1|p_x >= 1$. Cette notation a l'avantage de pouvoir traiter les densités de probabilités comme de distributions. La caractérisation des propriétés des variables décrivant des processus aléatoires se fait par l'intermédiaire de la loi de probabilité et ses moments.

8.1.1 Fonction caractéristique

On définit la fonction caractéristique $\Phi_X(s)$ de la v.a. X par

$$\Phi_X(s) = E(e^{-jsX}) = \sum_k e^{-jsX}P(X = X_k) = TFD\left(P(X = X_k)\right). \tag{8.20}$$

Comme son nom l'indique, la fonction caractéristique comporte toute les informations relatives aux propriétés statistiques du signal. Elle est de ce fait très importante en analyse des signaux. Remarquons que celle-ci fait intervenir la TFD de la loi de probabilité discrète $P(X = X_k)$.

On définit également la **densité de probabilité** $f_X(x)$ par

$$f_X(x) = \sum_k P(X = X_k)\delta(x - x_k), \tag{8.21}$$

que l'on peut considérer au sens des distributions. Dans ce cas, la fonction caractéristique $\Phi_X(s)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
\Phi_X(s) = E(e^{-jsx}) &= \int e^{-jsx} f_x(x)dx && (8.22)\\
&= \int e^{-jsx} \sum_k P(X = X_k)\delta(x - x_k)dx && (8.23)\\
&= \sum_k P(X = X_k) \int e^{-jsx}\delta(x - x_k)dx && (8.24)\\
&= \sum_k P(X = X_k)e^{-jsx_k} = TFD\left(P(X = X_k)\right). && (8.25)
\end{aligned}$$

8.2 Cas des variables aléatoires continues

Le cas des variables aléatoires continues est une transposition des variables discrètes en utilisant le signe "intégral" à la place du signe "somme".

8.2.1 Fonction de répartition

La fonction de répartition $F_X(x)$ est définie par :

$$F_X(x) = P(X \leq x), \tag{8.26}$$

et possède les propriétés suivantes :
- croissante
- $F_X(\infty) = 1$
- $F_X(-\infty) = 0$

8.2.2 Densité de probabilité

La fonction densité de probabilité $f_X(x)$ est définie par :

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}, \tag{8.27}$$

ou encore

$$P(x < X < x + dx) = F_X(x + dx) - F_X(x) = dF_X(x) = f_X(x)dx. \tag{8.28}$$

C'est une densité car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = lim_{x\to+\infty}F_X(x) - lim_{x\to-\infty}F_X(x) = 1 - 0 = 1. \tag{8.29}$$

8.2.3 Moments d'ordre n

Les différents moments d'ordre n s'expriment également à partir de la densité de probabilité, *i.e.*

$$E(X^n) = \int x^n f_X(x)dx. \tag{8.30}$$

8.2.4 Fonction caractéristique

La fonction caractéristique $\Phi_X(\omega)$ est définie par l'espérance de la variable aléatoire complexe $e^{-j\omega x}$, *i.e.*

$$\Phi_X(\omega) = E(e^{-j\omega x}) = \int f_X(x)e^{-j\omega x}dx = TF[f_X(x)], \tag{8.31}$$

qui se trouve être la transformée de Fourier de la densité de probabilité de la variable aléatoire.

Cette relation permet de mesurer l'importance de la transformée de Fourier dans le cas de l'étude des signaux aléatoires.

8.3 Lois de probabilité

Les lois de probabilité les plus utilisées et les plus fréquentes en génie des systèmes industriels sont la loi binomiale, la loi de Poisson, et la loi gaussienne.

8.3.1 Loi uniforme continue

La densité de probabilité $f_X(x)$ est définie par

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \text{ si } a < x < b \tag{8.32}$$

Propriétés :
- $E(X) = \frac{a+b}{2}$
- $\sigma^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

8.3.2 Loi binomiale discrète

Une expérience, un contrôle ou un test avec deux issues possibles (succès et échec) effectué dans un environnement industriel peut être réalisé avec une probabilité p. Appelons $P(X = k)$ la probabilité pour qu'il y ait k succès au cours des N expériences consécutives. On montre alors que cette probabilité s'écrit :

$$P(X = k) = C_N^k p^k (1-p)^{N-k}. \tag{8.33}$$

Propriétés :
- $E(X) = Np$
- $\sigma^2(X) = Np(1-p)$

8.3.3 Loi de Poisson

La loi de Poisson rend compte de nombreux phénomènes industriels, comme la gestion des files d'attentes, la maintenance des systèmes et la régulation des systèmes automatisés. Elle est à la base de la modélisation des chocs entre particules élémentaires constituant la matière, et permet ainsi de modéliser le bruit thermique (voir partie 12.1) omniprésent dans les matériaux et les systèmes.

Considérons un événement pouvant apparaître avec une probabilité p (un choc entre électrons (Fig.8.1), une panne dans un système, un événement économique, etc.). La probabilité pour que cet événement apparaisse k fois au cours de N expériences successives est donnée par la loi de Poisson, *i.e.*

$$P(X = k) = \frac{(Np)!}{k!} e^{-Np} \tag{8.34}$$

Propriétés :
- $E(X) = Np$
- $\sigma^(X) = \sqrt{Np}$

8.4 Cas particulier des processus gaussiens

Les processus gaussiens sont très présents dans les Sciences de l'Ingénieur. Il s'agit d'une constatation d'une certaine ubiquité des la présence des caractéristiques Gaussiennes dans la nature (Fig.**??**). Les processus gaussiens possèdent un certain nombre de propriétés remarquables qui en font des processus permettant d'être facilement intégrés dans une problématique industrielle. Ils possèdent notamment la propriété suivante : la transformation linéaire d'un processus gaussien est un processus gaussien.

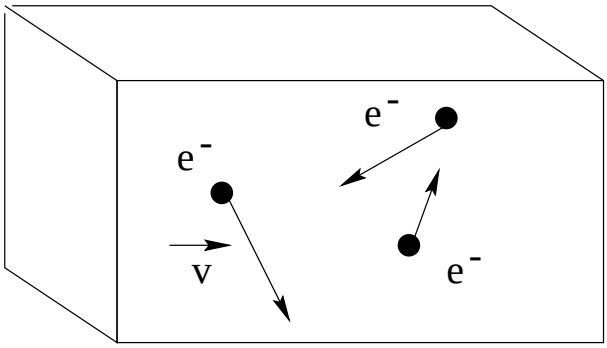
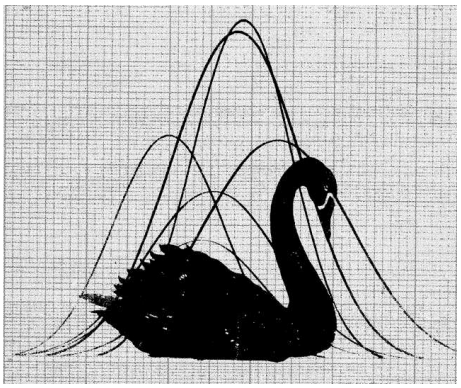
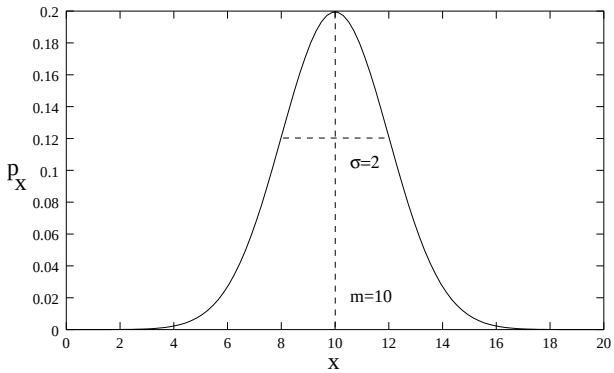


FIGURE 8.1 – *Les chocs entre électrons libres dans un conducteur modélisés par un processus de Poisson*



(a)



(b)

FIGURE 8.2 – *(a) What if Gaussian engineering is clear, simple, and wrong ?, IEEE Spectrum, Nov 2010 ; (b) Processus gaussien d'espérance $m = 10$ et d'écart type $\sigma = 2$*

Un processus aléatoire X sera dit gaussien si sa loi s'écrit (Fig. 8.2) :

$$p_x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}) \tag{8.35}$$

On montre que

$$E(X) = m, \tag{8.36}$$
$$E(X^2) = \sigma^2 + m^2, \tag{8.37}$$
$$\sigma^2(x) = \sigma^2, \tag{8.38}$$

et que tous les moments d'ordre supérieur $E(X^m)$ s'expriment en fonction de $E(X)$ et $E(X^2)$, moments d'ordre 1 et 2. Il n'existe pas de processus dont les moments s'expriment en fonction du seul moment d'ordre 1. Ceci provient de la conséquence du théorème de limite centrale.

Théorème de limite centrale

Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de carré intégrable et de même loi p_x avec

$$E(X_n) = \mu \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{8.39}$$

$$E(X_n^2) = \sigma^2 \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{8.40}$$

alors la loi $S_n = \sum_n X_n$ converge en un processus gaussien lorsque n tend vers l'infini.

Ce théorème explique pour une bonne part l'importance pratique des processus gaussiens. On remarque toutefois que ce théorème concerne la somme de variables aléatoires et qu'un résultat équivalent pour un produit n'existe pas de façon générale.

Afin de comparer les propriétés de plusieurs variables aléatoires et leur dépendance respective, on définit la covariance qui mesure le degré de corrélation.

8.4.1 Covariance statistique de deux variables aléatoires

La covariance de deux variables aléatoires X et Y de carré intégrable (d'énergie finie) s'écrit :

$$E(\widetilde{X},\widetilde{Y}) =< \widetilde{X}|\widetilde{Y} >= E((X-E(X)).(Y-E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y), \tag{8.41}$$

où

$$E(\widetilde{X}) = X - E(X) \ \ et \ \ E(\widetilde{Y}) = Y - E(Y). \tag{8.42}$$

La covariance s'interprète donc comme un produit scalaire de deux vecteurs $|\widetilde{X} >$ et $|\widetilde{Y} >$ de $\mathcal{L}_0^2(\Omega, P)$, espace vectoriel des classes d'équivalence des variables aléatoires centrées, de carré intégrable et de loi P. On rappelle que $\mathcal{L}_0^2(\Omega, P)$ est un espace de Hilbert pour la norme $||\sqrt{E(X^2)}||$.

La covariance nulle de deux variables aléatoires indépendantes se traduit ici par une orthogonalité des vecteurs $|\widetilde{X} >$ et $|\widetilde{Y} >$ dans l'espace $\mathcal{L}_0^2(\Omega, P)$. On retrouve alors l'idée de décomposition spectrale de deux signaux sur des bases orthogonales pour laquelle les propriétés sont décorrélées.

Ainsi, à chaque fois que l'on dispose de n variables aléatoires et que l'on veut déterminer leurs propriétés, il faut construire une base de n "vecteurs orthogonaux" (variables aléatoires décorrélées) permettant d'annuler les $\frac{n(n-1)}{2}$ covariances. On effectue alors une transformation linéaire qui nous fait passer des variables initiales aux variables décorrélées. Cette opération s'identifie à une décomposition spectrale, la variance (valeur propre) s'identifiant à "l' énergie" de la variable aléatoire.

Malheureusement, cette méthode ne s'applique que pour des variables de carré intégrable. Pour une variable aléatoire quelconque, la connaissance précise de la loi de probabilité devient indispensable.

CHAPITRE 9

Description statistique des signaux aléatoires

9.1 Qu'est ce qu'un signal aléatoire ?

Pour décrire un signal physique **réel**, il est nécessaire de construire, dans un premier temps une description la plus "naturelle" possible : la description temporelle. Il faut donc définir des variables aléatoires dépendant du temps t ; on parle alors de **variables indexées par le temps**.

Rigoureusement cette variable aléatoire s'écrit

$$X(t,s) \equiv X(t) \text{ (en pratique)}, \tag{9.1}$$

où t représente le temps et s représente l'aspect aléatoire de la variable. Si t est continu (resp. discret), on parle de variable aléatoire à temps continu (resp. discret).

La variable aléatoire $X(t)$ peut être totalement décrite par sa fonction de répartition Eq. (8.26)

$$F_X(t,x) = P(X(t) \leq x). \tag{9.2}$$

9.1.1 Signal aléatoire complexe

Dans de nombreux domaines comme l'optique ou l'électronique, on défini des variables physiques complexes (impédance, champs électromagnétiques, etc.) pour lesquelles il peut y être associée une fluctuation d'origine inconnue. Cette fluctuation sera traitée de façon aléatoire et nécessite la définition de variables aléatoires complexes

$$X(t,x) = A(t,s) + jB(t,s). \tag{9.3}$$

9.2 Moyenne et Variance de signaux aléatoires

9.2.1 Définition

Les signaux aléatoires étant considérés comme des variables aléatoires indexées par le temps, on définit la moyenne $m(t)$ par

$$\begin{aligned} m(t) = E(X(t,s)) &= \textstyle\sum_k x_k P(X = x_k) \quad \text{cas discret,} \\ &= \textstyle\int_\Omega X(s) f_X(s,t) ds \quad \text{cas continu.} \end{aligned} \tag{9.4}$$

La moyenne est complètement déterminée par la fonction de répartition $F_X(x,t)$. Si on connaît $F_X(x,t)$, on connaît $m(t)$ (réciproque fausse) Si $f_X(x,t)$ est indépendant de t, $m(t)$ aussi (réciproque fausse) La moyenne d'un signal aléatoire est donc une caractéristique d'un signal mais ne possède pas **toute** l'information relative à ce signal.

Les signaux aléatoires étant considérés comme des variables aléatoires indexées par le temps, on définit la variance $\sigma^2(t)$ par

$$\begin{aligned} \sigma^2(t) = E\left([X(t,s) - m(t)]^2\right) &= \textstyle\sum_k (x_k - m(t))^2 P(X = x_k) \quad \text{cas discret} \\ &= \textstyle\int_\Omega (x - m(t))^2 f_X(x,t) dx \quad \text{cas continu} \end{aligned} \tag{9.5}$$

Dans le cas d'un signal complexe, on a

$$\sigma^2(t) = E\left(\left|X(t,s)\right|^2\right) - \left|m(t)\right|^2. \tag{9.6}$$

9.2.2 Signification physique - Exemples

Considérons par exemple la tension aux bornes d'une résistance (Fig.9.1).

On mesure une tension non nulle appelée tension de bruit, qui se trouve être un signal aléatoire de moyenne nulle mais de valeur quadratique moyenne non nulle, qui représente

l'énergie délivrée par la résistance. L'origine de cette énergie est associée aux mouvement des électrons libres dans la résistance . On a

$$\begin{array}{ll} E(V(t)) & = 0 =< V(t) >= \overline{V(t)} \\ E(V^2(t)) & \neq 0 \equiv \text{puissance} \end{array} \tag{9.7}$$

9.3 Stationnarité

Un signal aléatoire est dit **stationnaire du 1er ordre** si sa fonction de répartition $F_X(t,x)$ est indépendante du temps, *i.e.*

$$F_X(t_1,x) = F_X(t_2,x) = F_X(x)\ \forall t_1, t_2. \tag{9.8}$$

Un signal aléatoire $X(t,s)$ est dit **stationnaire du 2ème ordre** si sa moyenne $E(X)$ et sa variance σ^2 est indépendante du temps, *i.e.*

$$\begin{array}{ll} E(X(t,s)) & = m \\ \sigma^2(X(t,s)) & = \sigma^2 \end{array} \tag{9.9}$$

Pratiquement, c'est cette stationnarité qui est le plus souvent demandée pour traiter les signaux physiques.

9.4 Caractérisation temporelle des propriétés statistiques des signaux aléatoires

Problématique : déterminer les propriétés statistiques du signal à l'instant t_2 en connaissant celles à l'instant t_1.

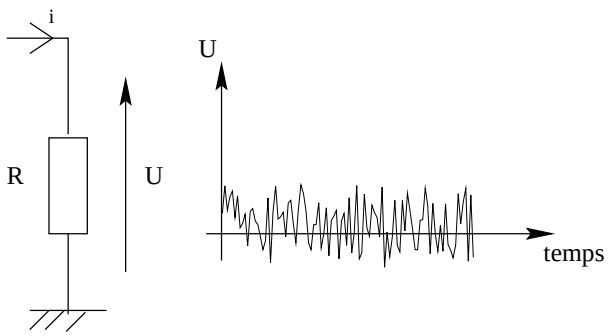


FIGURE 9.1 – *Bruit thermique dans une résistance*

9.4.1 Fonction de covariance temporelle

Considérons pour généraliser un signal complexe $X(t)$. La fonction de covariance $\gamma(t_1, t_2)$ est définie par

$$\boxed{\gamma(t_1, t_2) = E\left(X(t_1)X^*(t_2)\right) - m(t_1)m^*(t_2)}, \tag{9.10}$$

où $*$ représente la conjugaison complexe.

Propriétés :

- $\gamma(t, t) = \sigma^2(t)$. La variance σ^2 s'exprime à partir de la fonction de covariance.
- signaux stationnaires : $\gamma(t_1, t_2) = \gamma(t_1 - t_2) = \gamma(\tau)$ où $\tau = t_1 - t_2$. la fonction de covariance ne dépend que de la durée τ.

9.5 Fonction de corrélation ou d'autocorrélation

Cette fonction est une fonction fondamentale en traitement du signal : elle permet de caractériser un signal aléatoire de façon plus fine que la moyenne ou la variance (sans pour autant le déterminer complètement).

Elle permet de comparer le signal à un instant t en fonction des propriétés qu'il avait à l'instant $t - \tau$. Elle est donc définie par

$$\gamma(\tau) = \gamma(t, t - \tau). \tag{9.11}$$

Elle est également notée $C(\tau)$ dans certains ouvrages.

9.5.1 Propriétés de la fonction d'autocorrélation

Cas des signaux réels continus

Considérons des signaux réels continus à valeur moyenne nulle ($m(t) = 0$). On a alors

$$\gamma(\tau) = \gamma(t, t - \tau) = E\left(X(t)X(t - \tau)\right). \tag{9.12}$$

Si le signal est stationnaire du 1er ordre,

$$\begin{aligned} \gamma(\tau) &= E\left(X(t)X(t - \tau)\right) \\ &= \int x(t)x(t - \tau)f_X(x, t)dx \\ &= \int x(t)x(t - \tau)f_X(x)dx \text{ car } \tfrac{\partial f_X(x,t)}{\partial t} = 0 \end{aligned} \tag{9.13}$$

En remplaçant t par $t+\tau$, il vient

$$\begin{aligned}\gamma(\tau) &= \int x(t+\tau)x(t)f_X(x)dx \\ &= \int x(t)x(t+\tau)f_X(x)dx = \gamma(-\tau)\end{aligned} \tag{9.14}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\gamma(\tau) = \gamma(-\tau)} \text{ C'est une fonction paire}$$

Le lien avec la variance du signal est donné pour $\tau = 0$, en effet

$$\sigma^2(X) = E\left(X(t)X(t)\right) = \gamma(\tau = 0) = \gamma(0). \tag{9.15}$$

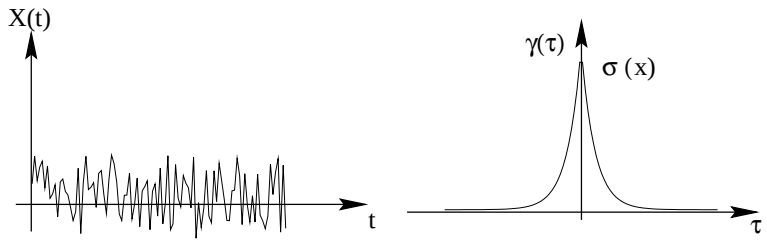


FIGURE 9.2 – *Propriétés de la fonction d'autocorrélation et lien avec la puissance du signal*

Cas des signaux discrets complexes

Si on suppose que ce signal possède en outre une valeur moyenne $m(t)$ non nulle , la fonction d'autocorrélation s'écrit :

$$\gamma(k_1, k_2) = E\left(X(k_1)X^*(k_2)\right) - m(k_1)m^*(k_2). \tag{9.16}$$

Si on suppose le signal stationnaire du second ordre (cf Eq.(9.9), il vient

- $m(k) = m$,
- $\gamma(k_1, k_2) = \gamma(k_1 - k_2)$,

avec

$$\gamma(k_1, k_2) = \gamma(k, k-p) = E\left(X(k)X^*(k-p)\right) - |m|^2, \tag{9.17}$$

et de ce fait, la fonction d'autocorrélation possède la propriété de symétrie suivante :

$$\boxed{\gamma(\tau) = \gamma^*(-\tau)} \tag{9.18}$$

Sens physique de la fonction d'autocorrélation

La fonction de corrélation permet de "mesurer" le caractère aléatoire d'un signal physique. Si $\gamma(\tau) = 0$, le signal est complètement aléatoire et le signal $x(t)$ à l'instant t est complètement décorrélé de ce même signal à l'instant passé $t - \tau$.

Le signal a donc perdu toute "mémoire de son passé". La fonction de corrélation permet donc la mesure de la "mémoire" d'un signal aléatoire. Elle permet donc de ce fait d'évaluer dans un phénomène apparaissant de façon aléatoire l'origine de ce phénomène (par exemple dans le cas d'une panne dans un système industriel).

Inversement, un signal dont la fonction de corrélation ne tend pas vers zéro est un signal qui possède "toute la mémoire de son passé" ; il s'agit donc d'un signal déterministe.

Exemple : Pour $x(t) = \cos(\omega t)$, on a $\gamma(\tau) = \frac{1}{2}\cos(\omega\tau)$.

9.6 Fonction de variables aléatoires

L'idée est de comparer les signaux aléatoires entre eux afin de définir une **mesure des signaux** et un **traitement des signaux** (détection, élimination d'un signal).

On suppose donc que la somme de deux signaux aléatoires $X_1(t,s)$ et $X_2(t,s)$ reste un signal aléatoire $Y(t,s)$.

On peut alors définir les mêmes quantités que pour un seul signal, à savoir la moyenne

$$E(Y(t,s)) = E(X_1(t,s) + X_2(t,s)) = E(X_1(t,s)) + E(X_2(t,s)), \tag{9.19}$$

la fonction de répartition

$$F(x_1, x_2) = P\left((X_1 \leq x_1).(X_2 \leq x_2)\right), \tag{9.20}$$

la densité de probabilité

$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}, \tag{9.21}$$

et la covariance

$$Cov(X_1, X_2) = E\left(X_1(t)X_2(t)\right) - E(X_1(t))E(X_2(t)). \tag{9.22}$$

9.6.1 Cas particulier de variables indépendantes

Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= F(x_1)F(x_2) \\ f(x_1, x_2) &= f(x_1)f(x_2) \\ Cov(x_1, x_2) &= 0 \text{(réciproque fausse)} \end{aligned} \tag{9.23}$$

Exemple : Soit deux signaux $X(t) = \sin\Phi$ et $Y(t) = \cos\Phi$ où Φ est une phase aléatoire uniformément distribuée dans $[0,2\pi]$.

Si on calcule l'espérance de X et Y, on trouve une valeur moyenne nulle. De même, le calcul de la covariance nous donne une valeur nulle. Les deux variables sont donc non corrélées. Et pourtant, on a $X^2 = 1 - Y^2$, ce qui prouve qu'elles sont dépendantes. En effet, si X est connue, Y l'est aussi.

Ceci est un exemple de réciproque fausse.

9.6.2 Intercorrélation de deux signaux

Comme pour le cas d'un seul signal, il est nécessaire de pouvoir comparer un signal avec le "passé" d'un autre signal. On défini alors la fonction d'intercorrélation $\gamma_{X_1,X_2}(t_1,t_2)$ (ou corrélation croisée) par

$$\gamma_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = E\left(X_1(t_1)X_2^*(t_2)\right) - E(X_1(t_1))E(X_2^*(t_2)). \tag{9.24}$$

Dans le cas particulier ou les signaux sont stationnaires et de valeurs moyennes nulles, il vient

$$\gamma_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = \gamma_{X_1,X_2}(\tau) = E\left(X_1(t)X_2^*(t-\tau)\right). \tag{9.25}$$

Propriétés : Soit $X_1(t)$ et $X_2(t)$ deux signaux stationnaires du second ordre. Construisons le signal $Y(t) = X_1(t) + X_2(t)$ et calculons sa fonction d'autocorrélation $\gamma_Y(\tau)$. On a

$$\begin{aligned}\gamma_Y(\tau) &= \int \left[X_1(t) + X_2(t)\right]\left[X_1(t-\tau) + X_2(t-\tau)\right] f_Y ds \\ &= \int X_1(t)X_1(t-\tau)f_Y ds + \int X_2(t)X_2(t-\tau)f_Y ds \\ &\quad + \int X_1(t)X_2(t-\tau)f_Y ds + \int X_2(t)X_1(t-\tau)f_Y ds \\ &= \gamma_{X_1}(\tau) + \gamma_{X_2}(\tau) + \gamma_{X_1X_2}(\tau) + \gamma_{X_2X_1}(\tau)\end{aligned} \tag{9.26}$$

Les deux derniers termes $\gamma_{X_1X_2}(\tau)$ et $\gamma_{X_2X_1}(\tau)$ sont appelés termes croisés. Une des applications concrète de cette fonction est la mesure de bruit et la détection de signaux dans le bruit

9.7 Ergodicité

La notion d'ergodicité peut se résumer par l'approche intuitive suivante. Comment peut on accéder à la valeur moyenne d'un signal statistique à un instant t.

Il faudrait être capable d'envisager l'ensemble des événements de Ω en un temps infinitésimalement court...lancer le même dé une infinité de fois pendant une durée nulle !!!!!

En pratique, on ne peut mesurer simultanément deux signaux dans les mêmes conditions. De ce fait, la moyenne s'écrit

$$m(t) \simeq m(T) = \frac{1}{T}\int_0^T X(t')dt'. \tag{9.27}$$

La problématique est donc la suivante : Est-ce que la moyenne temporelle du signal est égal à la moyenne statistique de la variable aléatoire :

$$\frac{1}{T}\int_0^T X(t')dt' = E[X(t)] \tag{9.28}$$

L'égalité (9.28) est appelée hypothèse ergodique. Si elle est vérifiée, on dit que le signal possède la propriété d'être ergodique (Fig.9.3). Il s'agit d'un problème théorique très difficile,

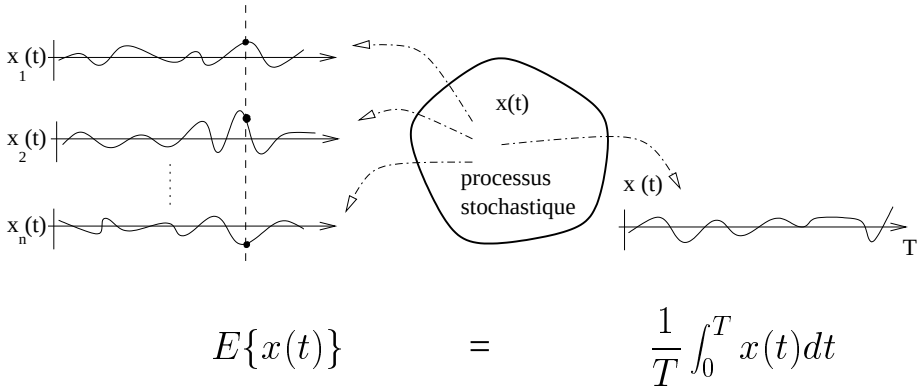


FIGURE 9.3 – *Processus stochastique vérifiant l'hypothèse ergodique*

mais on peut vérifier par quelques exemples que l'hypothèse est vraie dans de nombreux cas simples.

Exemple 1 : l'hypothèse est -elle vérifiée dans le cas du lancé de 5 dés d'un seul coup et dans celui du lancé des 5 dés les uns après les autres ?

Exemple 2 : soit un signal à phase aléatoire $A(s)$ uniformément répartie : $x(t) = \cos(2\pi\nu_0 t + A(s))$.

Vérifions que $x(t)$ est un processus stationnaire. On a

$$m(t) = E(x(t)) = \int_\Omega \cos(2\pi\nu_0 t + A(s))ds = 0 \tag{9.29}$$

De plus

$$E(x(t+\tau)x(t)) = \int_\Omega \cos(2\pi\nu_0(t+\tau) + A(s))\cos(2\pi\nu_0 t + A(s))ds = \frac{1}{2}\cos(2\pi\nu_0\tau), \tag{9.30}$$

ce qui prouve que le signal est stationnaire.

Calculons la moyenne temporelle $\overline{x(t)}$

$$\overline{x(t)} = lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \cos(2\pi\nu_0 t + A(s))dt = lim_{T\to\infty}\left[\frac{-1}{2\pi\nu_0 T}\sin(2\pi\nu_0 t + A(s))\right]_0^T = 0, \tag{9.31}$$

car l'intégrale est bornée quelque soit A. Le signal est donc ergodique.

CHAPITRE 10

Énergie et puissance des signaux aléatoires

10.1 Exemples physiques

Pour se rendre compte du fait qu'un signal aléatoire peut posséder une énergie, il suffit de s'imaginer dans un environnement sonore très bruyant où l'on "écoute" un son provenant de multiples sources à des niveaux sonores différents. Ce son possède une énergie qui, transmise dans nos oreilles, peut conduire à une détérioration de l'appareil auditif.

Comment "mesurer" l'énergie ou la puissance de ce signal qui se trouve être aléatoire ?

Un exemple analogue concernant les fluctuations de tension aux bornes d'une résistance (Fig.10.1) à été traité au paragraphe 9.2.2.

10.2 Définitions

On défini la puissance aléatoire instantanée par

$$P(t,s) = X(t,s)X^*(t,s) = |X(t,s)|^2, \tag{10.1}$$

qui est une variable aléatoire.

Si $X(t)$ est stationnaire, on peut calculer l'espérance de la puissance instantanée par

$$E(P(t,s)) = E(X(t,s)X^*(t,s)) = \gamma_X(t,t) = \gamma(0) = P = \sigma^2, \tag{10.2}$$

ce qui conduit à un résultat très important :

La puissance d'un signal aléatoire stationnaire est constante et est égale à la variance du signal aléatoire.

On défini l'énergie aléatoire d'un signal par

$$\mathcal{E}(T,s) = \int E(X(t,s)X^*(t,s))dt, \tag{10.3}$$

pour laquelle on peut avoir une valeur infinie, comme dans le cas des signaux sinusoïdaux. Dans ce cas, on préfère utiliser l'énergie moyenne $\mathcal{E}_{moy}$ définie sur une durée T par

$$\mathcal{E}_{moy}(T,s) = \frac{1}{T}\int_0^T E(X(t,s)X^*(t,s))dt, \tag{10.4}$$

10.3 Cas des signaux complexes

De la même manière que pour les signaux déterministes, on a

$$\boxed{\mathcal{P}(t) = X(t,s).X^*(t,s)}, \tag{10.5}$$

et la puissance moyenne sur une durée T par

$$\boxed{\mathcal{P}(t_0,T) = \frac{1}{T}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} X(t).X^*(t)dt}, \tag{10.6}$$

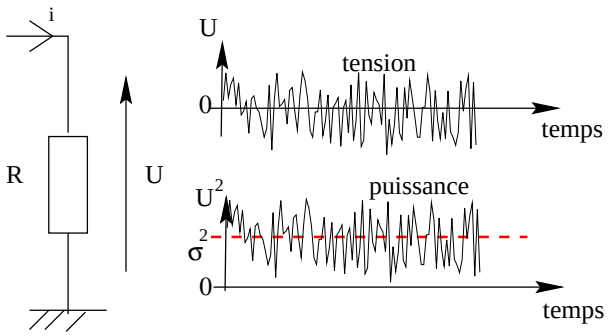


FIGURE 10.1 – *Puissance de bruit thermique dans une résistance*

et la puissance moyenne par

$$\boxed{\mathcal{P} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t).X^*(t)dt}. \tag{10.7}$$

L'énergie dans un intervalle de temps Δt autour d'un instant t_0 est définie par

$$\boxed{\mathcal{E}(t_0, \Delta t) = \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} \mathcal{P}(t)dt}, \tag{10.8}$$

alors que l'énergie totale considère le signal sur tout son domaine d'existence, *i.e.*

$$\boxed{\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(t)dt}, \tag{10.9}$$

De même que pour les signaux déterministes, on peut définir les énergies et puissances croisées entre deux signaux $X(t)$ et $Y(t)$. La puissance d'interaction s'écrit aussi

$$\boxed{\mathcal{P}_{XY}(t) = X(t).Y^*(t)}, \tag{10.10}$$

$$\boxed{\mathcal{P}_{YX}(t) = Y(t).X^*(t)}, \tag{10.11}$$

l'énergie d'interaction par

$$\boxed{\mathcal{E}_{XY} = \int \mathcal{P}_{XY}(t)dt = \int X(t).Y^*(t)dt}, \tag{10.12}$$

ou par

$$\boxed{\mathcal{E}_{YX} = \int \mathcal{P}_{YX}(t)dt = \int Y(t).X^*(t)dt}. \tag{10.13}$$

Pour les signaux non limités dans le temps, on parlera de puissance moyenne d'interaction

$$\mathcal{P}_{YX} = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} Y(t).X^*(t)dt, \tag{10.14}$$

s'il s'agit de signaux à puissance moyenne finie.

On dispose donc d'une représentation de la puissance et de l'énergie dans le domaine temporel des signaux aléatoire qui est identique à celle des signaux déterministes. Ceci favorise donc l'étude commune de ces signaux comme par exemple leur comparaison.

10.4 Énergie et puissance des signaux aléatoires dans le domaine spectral

Compte tenu de la propriété précédente concernant la possibilité de caractérisation des signaux aléatoires dans le domaine temporel, il est également possible de les caractériser dans le domaine spectral, par analyse de Fourier.

Le spectre est une décomposition dans le domaine des fréquences. En effet, un signal $x(t)$ peut s'écrire :

$$x(t) = \sum_n a_n \exp j\omega_n t, \tag{10.15}$$

dans le cas discret, et

$$x(t) = \int_n a(\omega) \exp j\omega t d\omega, \tag{10.16}$$

dans le cas continu ; avec a_n et $a(\omega)$ indépendants du temps.

Pourquoi cette décomposition ?

- les signaux exponentiels complexes sont les signaux propres des filtres linéaires,
- la réponse d'un système linéaire, invariant dans le temps à une excitation est une fonction sinusoïdale, *i.e.* $s(t) = \lambda e(t)$et $s(t) = T.e(t)$, donc $T.e(t) = \lambda e(t)$ est une équation aux valeurs propres.

Exemples :

- mécanique : modes de vibrations
- électronique : fonctions de transfert
- optique : diffraction et interférences
- physique du solide et des matériaux : vibrations de réseaux
- acoustique : propagation des ondes dans les milieux solides ou liquides

Remarque : ces milieux sont supposés linéaires et invariants dans le temps !!!!!

10.5 Densité spectrale de puissance (DSP) ou spectre de puissance

Nous rappelons la transformée de Fourier $X(\nu, s)$ d'un signal aléatoire par la fonction (qui est également aléatoire)

$$X(\nu, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t, s) e^{-2i\pi\nu t} dt. \tag{10.17}$$

On appelle spectre de puissance ou densité spectrale de puissance la quantité $S_{XX}(\nu)$ donnée par

$$\boxed{S_{XX}(\nu) = |X(\nu, s)|^2}. \tag{10.18}$$

La puissance spectrale du signal $x(t)$ s'écrit alors

$$\boxed{\mathcal{P}_X(\nu_0, \Delta\nu) = \int_{\nu_0-\Delta\nu/2}^{\nu_0+\Delta\nu/2} S_{XX}(\nu)d\nu}. \tag{10.19}$$

De la même manière que pour les signaux déterministes, la puissance d'un signal aléatoire ne dépend pas de la représentation choisie.

On vérifie également par une analyse dimensionnelle que $S_{XX}(\nu)$ a bien la dimension d'une densité spectrale de puissance.

10.6 Théorème de Wiener-Kinchine

Considérons un signal aléatoire, ergodique, stationnaire du second ordre ; la fonction d'autocorrélation donnée par

$$\gamma_X(\tau) = E\left[X(t)X^*(t-\tau)\right] - |m|^2, \tag{10.20}$$

et la densité spectrale du signal donnée par

$$S_{XX}(\nu) = |X(\nu)|^2, \tag{10.21}$$

alors le théorème de Wiener-Kinchine nous démontre que ces deux quantités sont reliées par la Transformée de Fourier, *i.e.*

$$\boxed{\mathcal{F}\left(\gamma_X(\tau)\right) = S_{XX}(\nu)}. \tag{10.22}$$

Dans le cas de deux signaux différents, on a

$$\boxed{\mathcal{F}\left(\gamma_{XY}(\tau)\right) = S_{XY}(\nu)}. \tag{10.23}$$

Ce résultat est fondamental : il permet de relier les propriétés spectrales et les propriétés statistiques des signaux.

Attention aux hypothèses : stationarité du second ordre et ergodisme.

10.6.1 Cas général du théorème de Wiener-Kinchine : élément de démonstration

Soit un système présenté en figure Fig. 10.2. Soit $H(\nu_0)$ la transformée de Fourier de la réponse impultionnelle $h(t)$ d'un filtre passe bande idéal, d'où

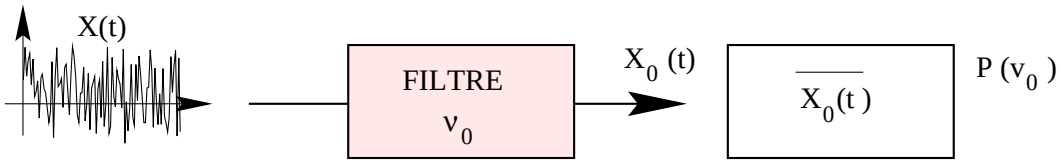


FIGURE 10.2 – *Démonstration intuitive du théorème de Wiener-Kinchine*

$$\begin{aligned} H(\nu_0) &= 1 \quad \text{pour } \nu_0 - d\nu < \nu < \nu_0 + d\nu, \\ &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned} \tag{10.24}$$

La réponse du filtre s'écrit

$$X_0(t) = X(t) * h(t), \tag{10.25}$$

et la puissance moyenne

$$\mathcal{P}(\nu_0) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X_0(t)X_0(t)dt = \gamma(\tau = 0). \tag{10.26}$$

Or la fonction d'autocorrélation $\gamma(\tau)$ s'écrit (cf Eq.(2.20))

$$\gamma_{X_0}(\tau) = \frac{1}{T}\int X_0(t)X_0(t-\tau)dt = \frac{1}{T}(X_0(\tau) * X_0(-\tau)), \tag{10.27}$$

donc

$$\gamma_{X_0}(\tau) = \frac{1}{T}(X(\tau) * h(\tau) * X(-\tau) * h(-\tau)) = \frac{1}{T}(\gamma_{XX}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)). \tag{10.28}$$

Par le théorème de Plancherel (Eq.(2.41)), il vient :

$$TF[\gamma_{X_0}(\tau)] = TF[\gamma_X(\tau)]H(\nu_0)H^*(\nu_0) = TF[\gamma_X(\tau)], \tag{10.29}$$

donc

$$\gamma_{X_0}(\tau) = \int TF[\gamma_X(\tau)]e^{2i\pi\nu_0\tau}d\nu. \tag{10.30}$$

En exprimant $\mathcal{P}(\nu_0)$, on a

$$\mathcal{P}(\nu_0) = \gamma_{X_0}(0) = \int TF[\gamma_X(\tau)]d\nu, \tag{10.31}$$

$$\mathcal{P}(\nu_0) = \int TF[\gamma_X(\tau)]d\nu. \tag{10.32}$$

Or

$$\mathcal{P}(\nu_0) = \int S_{XX}(\nu)d\nu, \tag{10.33}$$

ce qui donne par identification de (10.32) et (10.33), le résultat (10.22) du théorème de Wiener-Kinchine.

10.7 Corrélation et largeur de bande spectrale

Afin de cerner de façon plus intuitive la notion de corrélation temporelle, nous allons proposer une approche de la corrélation dans le domaine spectral.

Considérons un filtre idéal passe bas de bande passante B (Fig. 10.3). Appliquons un bruit en entrée de ce filtre et calculons la fonction de corrélation du signal de sortie.

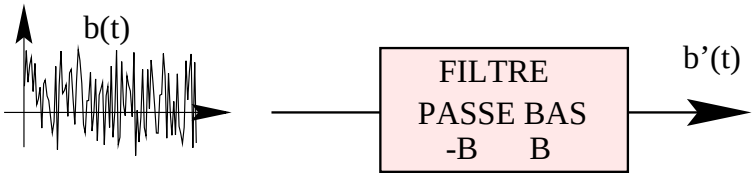


FIGURE 10.3 – *Corrélation et largeur de bande à travers un filtrage*

Le signal $b'(t)$ en sortie est donné par

$$b'(t) = b(t) * h(t), \tag{10.34}$$

et la corrélation en sortie s'écrit

$$\gamma_s(\tau) = s(\tau) * s(-\tau) = b(\tau) * h(\tau) * b(-\tau) * h(-\tau). \tag{10.35}$$

D'après Wiener-Kinchine,

$$S_s(\nu) = S_b(\nu)|H(\nu)|^2, \tag{10.36}$$

avec $H(\nu) = 1$ si $|\nu| < B$ et $H(\nu) = 0$ sinon.

L'entrée est un bruit blanc, donc $S_b(\nu) = Cte$ et $\gamma_b(\tau) = Cte\delta(\tau)$. On en déduit donc $S_s(\nu) = Cte$ si $|\nu| < B$ et $S_s(\nu) = 0$ sinon. Par transformée de Fourier inverse, la fonction de corrélation du signal aléatoire de sortie est :

$$\gamma_s(\tau) = 2CteB\frac{\sin(2\pi\tau B)}{2\pi\tau B}. \tag{10.37}$$

La limitation de bande d'un bruit blanc a pour effet de augmenter la corrélation.

CHAPITRE 11

Exemples de signaux aléatoires

Les signaux aléatoires sont le plus souvent décrit à partir de leur densité spectrale de puissance. Nous allons voir ici quelques uns d'entre eux et donner leurs propriétés spectrales.

11.1 Bruit blanc - Bruit de marche aléatoire

11.1.1 Bruit blanc

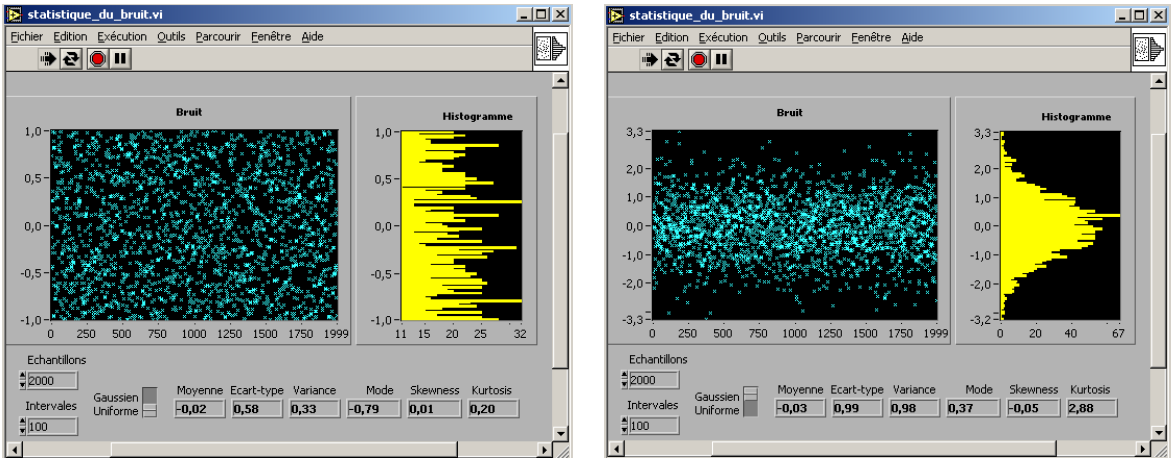
Le bruit blanc provient de l'agitation thermique des électrons dans les conducteurs et les matériaux. Mais il est également le résultat de toute agitation de transporteur de matière du fait de l'environnement extérieur. Il est donc omniprésent dans tout système ou un transfert d'information a lieu.

On l'appelle "bruit blanc" car sa densité spectrale de puissance est constante, ce qui fait qu'il "possède" toute les fréquences comme un signal optique de couleur blanche. Ces différentes caractéristiques sont présentées en figure Fig.11.2. La puissance totale de ce bruit est donc donné par l'intégrale de la densité spectrale de puissance sur la bande spectrale, ce qui fait que ce bruit est "théoriquement à énergie infinie". On peut également déterminer sa puissance par la valeur de sa fonction de corrélation pour $\tau = 0$ qui se trouve être égale à la

variance de la variable aléatoire décrivant la bruit blanc.

Il existe donc différents type de bruit blanc en fonction de la variable aléatoire décrivant le bruit.

Les plus répandus sont le bruit blanc gaussien où la variable aléatoire suit une loi gaussienne (Eq.(8.35)) et le bruit blanc uniforme ou la variable aléatoire suit une loi uniforme (Eq.(8.32)). Ces deux types de bruit présentent des propriétés statistiques différentes (cf Fig.11.1



(a) Bruit uniforme (b) Bruit gaussien

FIGURE 11.1 – *Propriétés statistiques du bruit blanc uniforme (a) et gaussien (b)*

11.1.2 Bruit de marche aléatoire

Un processus de marche aléatoire (ou mouvement Brownien) consiste à incrémenter ou décrémenter (avec la même probabilité P) d'un pas δx_0. On peut alors écrire :

$$x(t+dt) = x(t) + \epsilon\, \delta x_0 \quad \text{avec} P(\epsilon = -1) = P(\epsilon = +1) = \frac{1}{2}. \tag{11.1}$$

où

$$x(t+dt) - x(t) = \epsilon\, \delta x_0, \tag{11.2}$$

$$x(t+dt) - x(t) = dx(t). \tag{11.3}$$

En intégrant (11.2), il vient

$$\int dx(t) = \delta x_0 \int \epsilon, \tag{11.4}$$

ou encore

$$x(t) = \delta x_0 \int \epsilon. \tag{11.5}$$

Si on suppose le processus ϵ aléatoire, on peut alors considérer le processus $v_0(t)$ comme représenté par l'intégration d'un bruit blanc qui produit un spectre en $1/f^2$. En effet d'après la relation reliant la TF d'une fonction et la TF de sa dérivée, on a

$$TF[x(t)] = TF\left[\int \epsilon dt\right] = \frac{1}{2i\pi f} TF[\epsilon], \tag{11.6}$$

d'où

$$S_x(f) = |TF[x(t)]|^2 = \left|\frac{1}{2i\pi f} TF[\epsilon]\right|^2 = \frac{1}{4\pi^2 f^2} S_\epsilon(f) \simeq \frac{1}{f^2}, \tag{11.7}$$

ce qui donne une densité spectrale en $1/f^2$. Elle possède donc une valeur quadratique moyenne croissante en fonction du temps et ce n'est donc pas un processus stationnaire.

11.2 Exemples de Densité Spectrale de Puissance

La figure Fig11.2 présente les caractéristiques du bruit blanc $b(t)$: la fonction de corrélation est donnée par un delta de Dirac et la densité spectrale est constante. Dans le cas, d'une impulsion de Dirac, la fonction d'autocorrélation est aussi un Dirac, et la densité spectrale est identique. La caractéristique spectrale d'un Dirac est identique à celle d'un bruit blanc ! ! ! ! !

L'application est l'identification des systèmes.

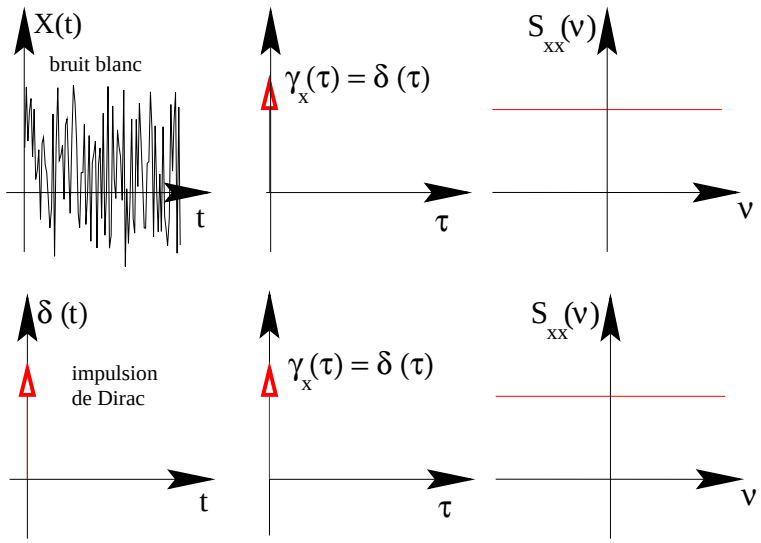


FIGURE 11.2 – *Caractéristiques du bruit blanc et de l'impulsion de dirac*

11.3 Signal aléatoire binaire (codage NRZ)

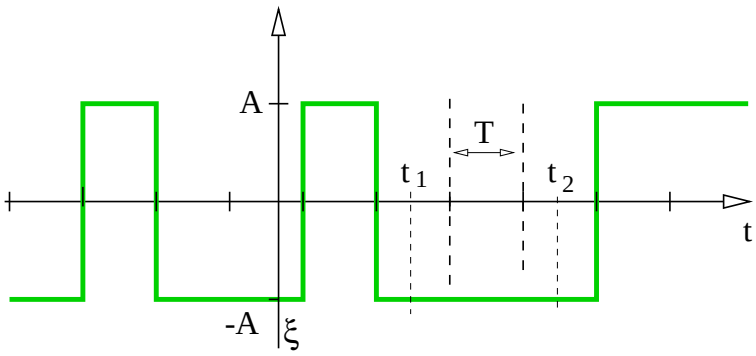


FIGURE 11.3 – *Signal temporel NRZ (Non retour à zéro)*

Un autre exemple de signal aléatoire utilisé en télécommunications mobiles par le signal NRZ (Non retour à Zéro) défini par la figure Fig. 11.3. Il correspond également à la norme RS 232 et est utilisé pour la transmission de 30 voies téléphoniques sur 20 km à une fréquence de 2 MHz.

On suppose que ξ, abscisse du premier changement d'état, est une variable aléatoire uniforme sur $[0, T]$. Le signal NRZ est généré par un changement aléatoire d'état à chaque période T avec

$$P(x = A) = p \text{ et } P(x = -A) = q = 1 - p = \frac{1}{2}, \tag{11.8}$$

pour laquelle, on calcule les différents moments :

$$\begin{array}{lll} E(x) & = Ap + (-A)q & = 0 \\ E(x^2) & = A^2p + (-A)^2q & = A^2. \end{array} \tag{11.9}$$

La fonction d'autocorrélation $\gamma_x(t_1, t_2)$ dépend de $|t_1 - t_2|$

- ♣ si $|t_1 - t_2| > T$, $x(t_1)$ et $x(t_2)$ sont indépendants et de ce fait $\gamma_x(t_1, t_2) = 0$
- ♠ si $|t_1 - t_2| < T$, deux cas se présentent
  - ✓ si $x(t_1)$ et $x(t_2)$ sont dans la même période, alors $E(x(t_1)x(t_2)) = A^2$.
  - ✓ sinon $E(x(t_1)x(t_2)) = 0$

La fonction d'autocorrélation s'écrit donc :

$$\gamma_x(t_1, t_2) = A^2.\widetilde{P}(t_1 \text{ et } t_2 \text{ dans la même période }) + 0.(1 - \widetilde{P}) \tag{11.10}$$

Calculons cette probabilité $\widetilde{P}$. La variable ξ étant uniforme dans $[0, T]$, on a :

$$\begin{aligned} \widetilde{P}(t_1 \text{ et } t_2 \notin T) &= \tfrac{|t_1-t_2|}{T}, \\ \widetilde{P}(t_1 \text{ et } t_2 \in T) &= 1 - \tfrac{|t_1-t_2|}{T}. \end{aligned} \tag{11.11}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \gamma_x(t_1,t_2) &= A^2(1-\tfrac{|t_1-t_2|}{T}) = A^2(1-\tfrac{|\tau|}{T}) && \text{si } \tau < T \\ \gamma_x(\tau) &= 0 && \text{sinon.} \end{aligned} \tag{11.12}$$

Le processus NRZ est donc un processus stationnaire du second ordre sur lequel on peut donc appliquer le théorème de Wiener-Kinchine pour en déduire la densité spectrale de puissance donnée par

$$S_x(\nu) = TF[\gamma_x(\tau)] = A^2 T \left[\frac{\sin(\pi\nu\tau)}{\pi\nu\tau}\right]^2 \tag{11.13}$$

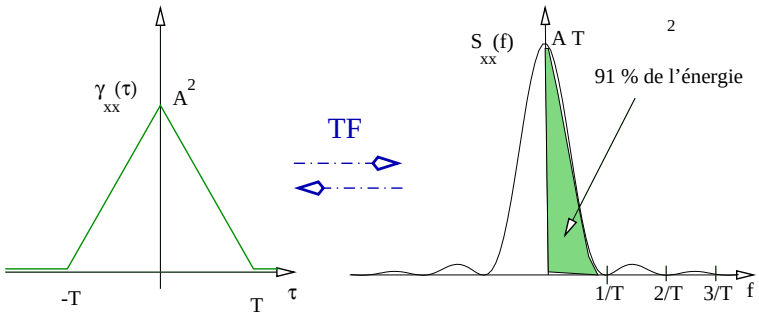


FIGURE 11.4 – *Fonction de corrélation et spectre du signal NRZ*

Le signal possède donc un spectre donnée par la figure Fig. 11.4 pour lequel on constate que 91% de la puissance est contenue dans le lobe principal. On constate également que la récupération du signal d'horloge est impossible.

11.4 Signal pseudo-aléatoire - Générateur de signaux aléatoires

La plupart des ordinateurs utilisent des générateurs de signaux pseudo-aléatoires nécessaires à la simulation. Ceux-ci sont élaborés à partir d'algorithmes utilisant les propriétés des congruences. Mais en pratique l'intérêt de disposer de générateurs de signaux aléatoires provient de la possibilité de ceux-ci de caractériser les systèmes.

Cependant, la génération de l'aléatoire est impossible avec un dispositif qui est intrinsèquement déterministe. On ne peut donc que générer des signaux déterministes mais avec un comportement suffisamment aléatoire pour les considérer comme tel : on dit alors qu'ils sont pseudo-aléatoires.

11.4.1 Réalisation électronique du générateur de signaux pseudo-aléatoires

Prenons le cas d'un générateur de $N = 3$ bits constitué de 3 bascules possédant une fréquence d'horloge $f_h = 1/T_h$ et possédant au moins un état initial à 1 (Fig.11.5) .

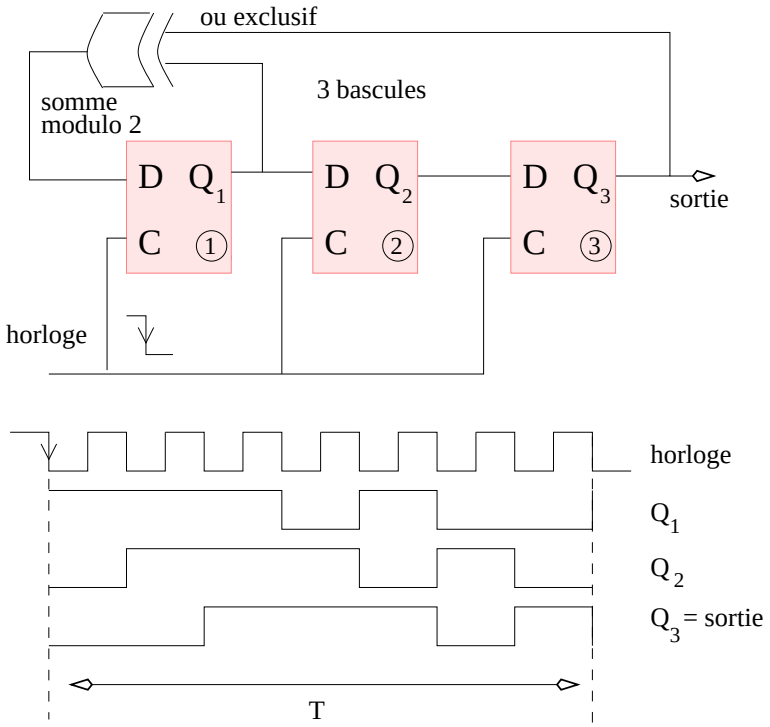


FIGURE 11.5 – *Un exemple de générateur de signaux pseudo-aléatoires*

On a ainsi une période du signal qui est de $T = 2^N - 1$ possédant 2^{N-1} états "1" et $2^{N-1} - 1$ états "0". Si $N \to \infty$, on a donc une équiprobabilité des états.

On peut montrer que la fonction d'autocorrélation s'écrit :

$$\gamma_x(\tau) = A^2 \left\{ \frac{-1}{2^N - 1} + \frac{2^N}{2^N - 1} \sum_k \bigwedge_{1/T_h} (t - kT) \right\}. \tag{11.14}$$

Le signal étant périodique, la fonction d'autocorrélation l'est aussi (Fig. 11.6). On constate une composante continue provenant du fait que le signal possède une valeur moyenne $\frac{A^2}{(2^N-1)^2}$ non nulle du fait de la non équiprobabilité des états. Si $T \to \infty$, le nombre de bascule devient grand et les caractéristiques du signal sont équivalentes à celles du signal NRZ.

Exemple concret : $S_x(f) = A^2$ à 10% près si $f < 0.178 f_h$. Avec une fréquence d'horloge de 4 MHz, on peut construire un générateur de bruit aléatoire possédant un spectre blanc jusqu'a 700 kHz.

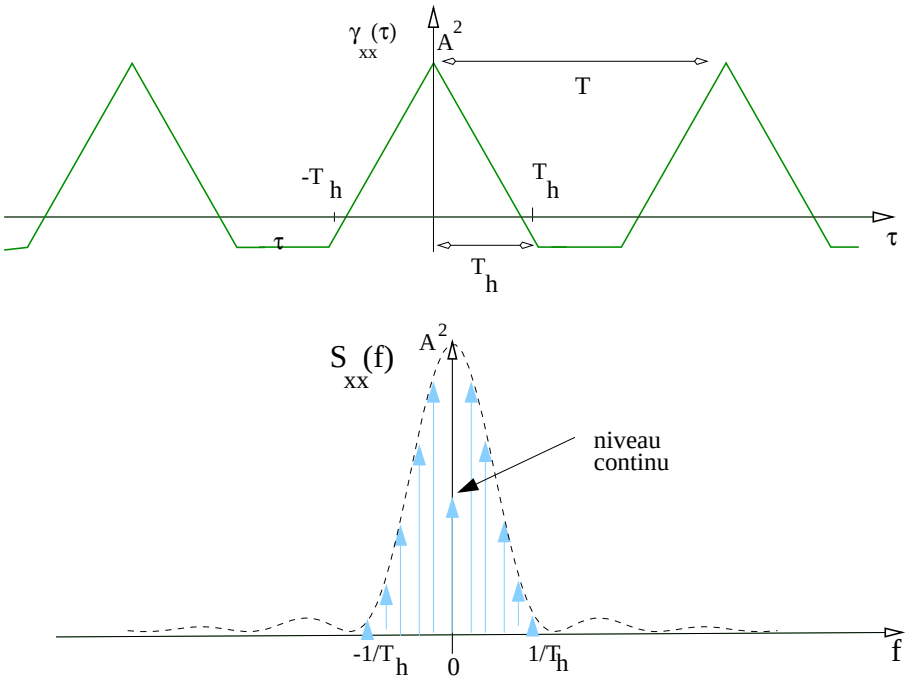


FIGURE 11.6 – *Fonction de corrélation et spectre du signal pseudo-aléatoire*

CHAPITRE 12

Notions de bruit et fluctuations

La notion de bruit peut être étendue à toute fluctuation aléatoire intervenant de façon perturbative dans un système en fonctionnement. Il existe une très grande variété de bruits dans les technologies actuelles. Parmi les bruits, on trouve

- ♣ le bruit de fond : origines diverses, interne au système, externe issu du couplage avec l'extérieur ↬ très difficile à caractériser.
- ♡ bruit du système : interne + externe
- ♢ bruit du à la mesure ou à la caractérisation du système (exemple : fluctuation de la référence d'un analyseur de spectre (voir TP TS).

Dans tous les cas de figure, le bruit total sera la superposition de tous ces bruits (qui peuvent avoir des ordres de grandeur différents), et ce sera celui de plus forte puissance qui fixera le bruit du système (Fig. 14.24). Éliminer un bruit qui s'avère négligeable n'aura aucun effet sur le bruit total. La réalisation de systèmes sans bruit est donc une prouesse technologique.

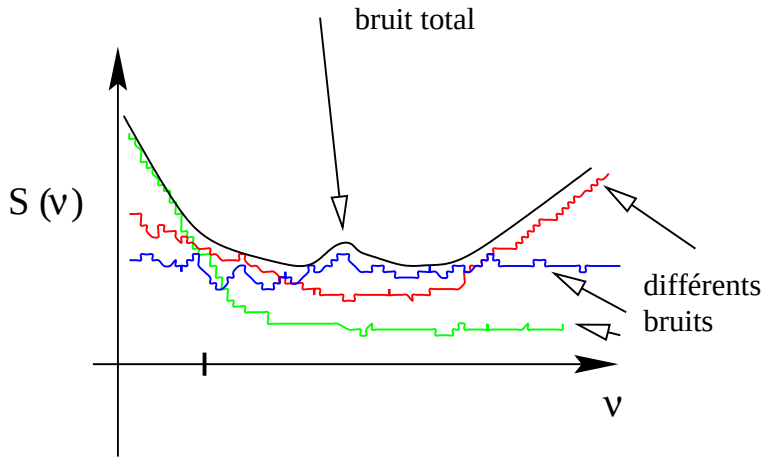


FIGURE 12.1 – *Influence des différents bruits (supposés non corrélés) dans la contribution totale du bruit d'un système*

12.1 Bruit thermique - Origine Physique -Formule de Nyquist

12.1.1 Expérience

Si on mesure la tension aux bornes d'une résistance de grande valeur, on observe une tension non nulle de quelques microvolts.

L'origine des cette tension provient de l'agitation thermique des électrons dans la résistance. Si on définit τ_0 le temps moyen entre deux chocs et l_0 la longueur moyenne séparant deux chocs, on a $l_0 = v_{th}\tau_0$ où v_{th} est la vitesse thermique donnée à partir de la thermodynamique statistique de Boltzmann, *i.e.*

$$v_{th} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}, \tag{12.1}$$

où $k = 1.38e^{-23}USI$, T est la température thermodynamique et m la masse de l'électron.

On peut montrer que la densité spectrale des fluctuations de courant dans la résistance est donnée par

$$S_I(\nu) = \left(\frac{\sin(\pi\nu\tau)}{\pi\nu\tau}\right)^2, \tag{12.2}$$

avec $\tau = 1e^{-12}s$

De ce fait le spectre est supposé blanc lorsque $f < 0.178e^{12}$ Hz $\simeq$ 100 GHz . Si T augmente, τ diminue et on observe un élargissement du spectre.

12.1.2 Formule de Nyquist

Afin de mesurer la puissance de ces fluctuations, considérons le schéma de la figure Fig.12.2. L'énergie totale des fluctuations de la variable thermodynamique $v(t)$ est égale à celle stockée dans le condensateur de mesure, soit

$$\boxed{\frac{1}{2}kT = \frac{1}{2}C < v^2(t) >}, \tag{12.3}$$

en utilisant les résultats de la thermodynamique de Bolzmann.

La caractéristique spectrale de $v(t)$ est donnée à partir de la fonction de transfert du diviseur de tension (Fig. 12.2), *i.e.*

$$V(\nu) = \frac{E(\nu)}{1 + 2j\pi\nu\tau}, \tag{12.4}$$

avec $\tau = RC$.

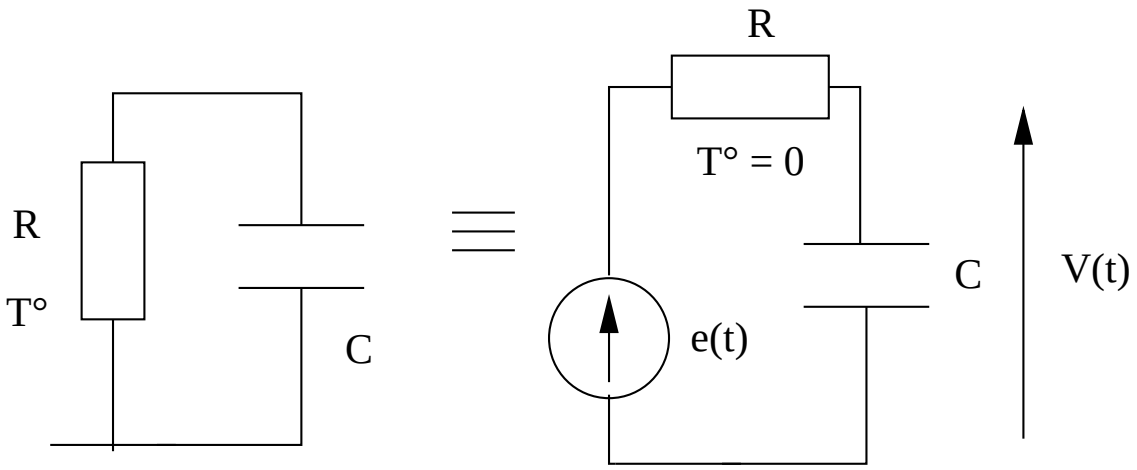


FIGURE 12.2 – *Etude expérimentale du bruit thermique*

L'énergie est alors donnée par

$$< v^2 >= \int |V(\nu)|^2 d\nu = |E|^2 \int \frac{1}{1 + 4\pi^2\nu^2\tau^2} d\nu, \tag{12.5}$$

$$< v^2 >= |E|^2 \frac{1}{2\pi\tau} [\arctan(2\pi\nu\tau)]_{-\infty}^{+\infty} d\nu = \frac{|E|^2}{2\tau}. \tag{12.6}$$

En identifiant (12.3) et 12.6), il vient

$$|E|^2 = 2kRT, \tag{12.7}$$

qui nous informe que la densité spectrale est indépendante du courant traversant la résistance. La valeur quadratique moyenne de $v(t)$ mesurée dans une bande de fréquence Δf est donc

$$\boxed{< v^2(t) >= \int_{-B}^{B} 2kRTdv = 4kRT\Delta f}. \tag{12.8}$$

Application numérique : pour T=300 K, B= 1 MHz et $R = 50\Omega$, on trouve $< v^2(t) >= 8.e^{-13}V^2$, soit $\sqrt{< v^2(t) >} \simeq 10^{-6}V$.

12.2 Autres types de bruits - Bruit en $1/f$

Il existe toute une variété de bruit comme le bruit de grenaille (Shot Noise), lié au passage des porteurs de charges électriques dans les composants semi-conducteurs (processus de Poisson).

Mais il existe un bruit omniprésent dans la nature qui porte le nom de bruit en $1/f$ ou bruit flicker ou bruit basse fréquence. Ce bruit possède les propriétés suivantes

- origine inconnue !!!!!
- stationarité : non démontrée
- ergodicité : non démontrée
- distribution gaussienne : non démontrée
- signal à énergie infinie lorsque f tend vers 0 ou vers l'infini
- il ne peut provenir d'un processus de dérivation ou d'intégration
- signal avec mémoire : ? ? ? ? ? ?

Le terme "bruit en $1/f$" provient du fait que la densité spectrale tend vers l'infini lorsque la fréquence tend vers zéro. On peut résumer la problématique du bruit en $1/f$ ainsi. C'est un processus aléatoire qui possède une probabilité non nulle pour que n'importe quel événement se produise si on attend suffisamment dans le temps !!!!!

12.3 Rapport Signal sur Bruit

Le rapport signal sur bruit (RSB) ou SRN (Signal to Noise Ratio) est une grandeur qui permet de mesurer le rapport entre la puissance du signal par rapport à celle du bruit.

Il n'a de sens qui si le bruit est supposé blanc ou considéré comme blanc dans un montage à bande étroite.

12.3.1 Définition

On a

$$\left[\frac{S}{B}\right]_{\text{source}} = \frac{\overline{u_s^2(t)}}{u_b^2(t)} = \frac{\overline{u_s^2(t)}}{4kR_sT_s\Delta f_{\text{bruit}}}, \tag{12.9}$$

où $\overline{u_s^2(t)}$ est la valeur quadratique moyenne de la tension du signal et $u_b^2(t)$ la tension équivalente de bruit. Le rapport Signal sur Bruit se mesure en dB par la relation suivante :

$$\left[\frac{S}{B}\right]_{dB} = 10\log_{10}\left[\frac{S}{B}\right]. \tag{12.10}$$

12.3.2 Exemple de SNR à la sortie d'un montage

Considérons le schéma de la figure Fig.12.3. La puissance disponible en sortie est

$$S_0 = \frac{\overline{u_0^2(t)}}{R_0}, \tag{12.11}$$

et le bruit filtré par le montage est donné par

$$E_0^2(f) = |H(f)|^2 E_i^2(f). \tag{12.12}$$

La puissance de bruit disponible en sortie s'écrit

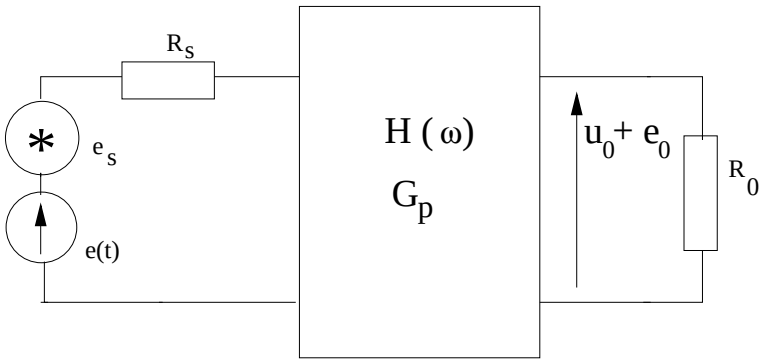


FIGURE 12.3 – *Influence d'un montage sur le SNR*

$$B_0 = \frac{e_0^2(t)}{4R_0} = \frac{E_i^2 H_0^2 \Delta f_{bruit}}{4R_0}. \tag{12.13}$$

Le SNR s'écrit donc

$$\begin{aligned} SNR_{sortie} &= 10\log\left(\frac{S_0}{B_0}\right) = 10\log\left(\frac{u_0^2(t)}{E_i^2 H_0^2 \Delta f_{bruit}}\right) \\ &= 10\log\left(\frac{u_s^2(t)}{4kR_sT_s\Delta f_{bruit}}\frac{4kR_sT_s}{E_i^2}\right) = SNR_{source} + 10\log\frac{1}{F}, \end{aligned} \tag{12.14}$$

avec $F = \frac{E_i^2}{4kR_sT_s}$ appelé **facteur de bruit** du montage. Ceci montre que l'on a toujours une dégradation du rapport signal sur bruit lorsque un signal traverse un montage.

CHAPITRE 13

Applications de l'analyse spectrale

Les principales applications de l'analyse spectrale et de la représentation spectrale des signaux aléatoires sont

– la détection : déterminer la présence d'un signal

– l'extraction : déterminer les propriétés spectrales d'un signal

Dans cette étude, on appelle $x(t)$ le signal et $b(t)$ le bruit qui est supposé blanc et de puissance σ_b^2. La mesure ou l'observation sera celle de $y(t)$ donnée par

$$y(t) = x(t) + b(t). \tag{13.1}$$

La puissance du signal est $\overline{x^2(t)} = E[y(t)]^2$ car $E[y(t)] = x(t)$ et $\sigma^2(y(t)) = E[(y(t) - E(y(t)))^2] = E[b(t)^2] = \sigma^2$. Donc la puissance du bruit est

$$\overline{b^2(t)} = \sigma^2(y(t)). \tag{13.2}$$

Le rapport SNR est alors donné par

$$\boxed{\left[\frac{S}{B}\right] = \frac{\overline{x^2(t)}}{\overline{b^2(t)}} = \frac{E[y(t)]^2}{\sigma^2(y(t))}}. \tag{13.3}$$

Les différentes opérations suivantes sont alors possibles :

◊ détection d'un signal périodique
◊ détection d'un signal de période connue
◊ extraction d'un signal périodique
◊ détection de périodicité cachée
◊ caractéristique dynamique des systèmes linéaires
◊ mesure de cohérence
◊ mesure de décalage temporel de deux signaux
◊ détection synchrone
◊ estimation d'un signal par intercorrélation synchrone
◊ filtrage adapté

13.1 Détection d'un signal périodique

On doit détecter un signal tel que $x(t+T) = x(t)$ avec $\overline{x(t)} =< x(t) >= 0$, mais on a

$$y(t) = x(t) + b(t), \tag{13.4}$$

où $b(t)$ est un bruit blanc de puissance σ^2 mesuré dans une bande B : $\sigma^2 = 2BS_{bb}$.

13.1.1 Principe

Le principe est de déterminer la fonction de corrélation $\gamma_y(\tau)$ en supposant que le signal et le bruit sont indépendants.

On a

$$\gamma_y(\tau) = \gamma_x(\tau) + \gamma_{xb}(\tau) + \gamma_{bx}(\tau) + \gamma_b(\tau) = \gamma_x(\tau) + \gamma_b(\tau). \tag{13.5}$$

Or le bruit est supposé blanc, donc on peut écrire

$$\lim_{\tau\to\infty} \gamma_b(\tau) = 0, \tag{13.6}$$

d'où

$$\lim_{\tau\to\infty} \gamma_y(\tau) = \gamma_x(\tau), \tag{13.7}$$

avec $\gamma_x(\tau+T) = \gamma_x(\tau)$.

13.1.2 Calcul du SNR

Supposons que $x(t) = A\cos\omega_0 t$, le SNR est alors de

$$SNR_x = \frac{A^2}{2\sigma^2}. \tag{13.8}$$

Calculons le SNR de la fonction d'autocorrélation $\gamma_y(\tau)$ afin de vérifier que celle-ci est plus faible. D'après l'équation (13.3), le SNR de la fonction d'autocorrélation $\gamma_y(\tau)$ est :

$$SNR = \frac{E[\gamma(\tau)]^2}{\sigma^2(\gamma(\tau))}. \tag{13.9}$$

Il nous faut exprimer la fonction d'autocorrélation $\gamma_y(\tau)$ qui est périodique sur une période, *i.e.*

$$\gamma_y(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T [A\cos\omega_0 t + b(t)][A\cos\omega_0(t-\tau) + b(t-\tau)]dt, \tag{13.10}$$

car le signal est supposé ergodique. La moyenne statistique est égale à la moyenne temporelle. Calculons alors l'espérance de $\gamma_y(\tau)$:

$$E[\gamma_y(\tau)] = \frac{A^2}{T}\int_0^T [\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau)dt + \gamma_b(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau + \gamma_b(\tau). \tag{13.11}$$

Si on se place à τ grand, $\gamma_b(\tau) \to 0$ et la puissance du signal (sur une période) est alors

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}\frac{A^2}{2}\frac{A^2}{2} = \frac{A^4}{8} \tag{13.12}$$

Calculons enfin la variance de $\gamma_y(\tau)$:

$$\sigma^2\gamma_y = E[(\gamma_y(\tau))^2] - E[(\gamma_y(\tau))]^2. \tag{13.13}$$

Or,

$$\begin{aligned} E[(\gamma_y(\tau))^2] &= \tfrac{1}{T^2}\int\int \quad [A\cos\omega_0 u + b(u)][A\cos\omega_0(u-\tau) + b(u-\tau)] \\ & \qquad [A\cos\omega_0 v + b(v)][A\cos\omega_0(v-\tau) + b(v-\tau)]dudv \\ & \qquad \looparrowright \text{16 termes !!!!!} \\ & \qquad \text{....démonstration lourde !!!} \\ \sigma^2_{\gamma_y} & \qquad = \tfrac{A^2\sigma^2}{2BT} + \tfrac{\sigma^4}{2BT} \end{aligned} \tag{13.14}$$

avec B la bande spectrale de mesure. De ce fait, le SNR est donc de :

$$SNR_\gamma = \frac{A^4}{8}\frac{2BT}{A^2\sigma^2 + \sigma^4} \tag{13.15}$$

Si l'on compare avec l'expression (13.8), on a

$$\frac{SNR_\gamma}{SNR_x} = SNR_e \frac{BT}{1 + 2SNR_e} \tag{13.16}$$

avec $SNR_e = \frac{A^2}{2\sigma^2}$.

Si $SNR_e << 1$, ce qui justifie ce mode de détection, la gain G du SNR est

$$G = SNR_e BT, \tag{13.17}$$

qui est positif (en dB) si $BT > 1/SNR_e$.

Exemple : $SNR_e = \frac{A^2}{2\sigma^2}$ avec $\sigma^2 = 2BS_b(\nu)$ la puissance de bruit dans la bande B. Le gain est supérieur à 1 si $T > \frac{4S_b(\nu)}{A^2}$, où T est le temps d'intégration du calcul de la fonction d'autocorrélation.

13.2 Détection d'un signal de période connue

Dans ce cas, on dispose d'une information supplémentaire : la période T. On a toujours $x(t+T) = x(t)$ avec $\overline{x(t)} =< x(t) >= 0$, mais on a $y(t) = x(t) + b(t)$ où $b(t)$ est un bruit blanc de puissance σ^2. On dispose de plus d'un signal $z(t)$ déterministe de période T, et on va utiliser ce signal comme "instrument de mesure" pour le comparer à $y(t)$, en calculant la fonction d'intercorrélation $\gamma_{zy}(\tau)$:

$$\gamma_{zy}(t) = [x(t) + b(t)] * z(-t) = \gamma_{xz}(t) + \gamma_{bz}(t). \tag{13.18}$$

Or le bruit et le signal $z(t)$ sont supposés non corrélés, de ce fait, $\gamma_{bz}(t) = 0$ et $\gamma_{zy}(t) = \gamma_{xz}(t)$ est alors une fonction périodique de période T.

13.2.1 Calcul du rapport signal sur bruit

Supposons $x(t) = A\cos\omega t$ et $z(t) = Z\cos\omega t$. Dans ce cas

$$\gamma_{zy}(\tau) = \frac{AZ}{2}\cos\omega\tau + \frac{Z}{T}\int b(t-\tau)\cos\omega t dt, \tag{13.19}$$

qui est une fonction aléatoire dont l'espérance est alors

$$E[\gamma_{zy}(\tau)] = \frac{AZ}{2}\cos\omega\tau. \tag{13.20}$$

Par un calcul analogue, on en déduit également le moment d'ordre deux

$$E[\gamma_{zy}^2(\tau)] = \frac{A^2Z^2}{8}. \tag{13.21}$$

Si on suppose $T >> 1$, il vient d'après (13.14)

$$\sigma^2(\gamma_{zy}(\tau)) = \frac{\sigma^2 Z^2}{4BT}, \tag{13.22}$$

et de ce fait le SNR est égal à

$$SNR_\gamma = \frac{E[\gamma_{zy}^2(\tau)]}{\sigma^2(\gamma_{zy}(\tau))} = \frac{A^2BT}{2\sigma^2}, \tag{13.23}$$

qui comparé au SNR en entrée donne un rapport de

$$\frac{SNR_\gamma}{SNR_e} = BT > 1, \tag{13.24}$$

indiquant l'intérêt de cette méthode pour la caractérisation d'un signal dont on connaît la période. Si on compare les deux expressions (13.17) et (13.24), on constate que cette dernière ne comporte pas de condition sur le rapport signal sur bruit en entrée, ce qui en fait une méthode de détection plus performante.

13.3 Extraction d'un signal périodique par moyennage

Les hypothèses sont toujours les mêmes que pour les cas précédents. On construit un signal $z(t)$ par moyennage successif de M points du signal $y(t)$ (13.4), *i.e.*

$$z(t) = \frac{1}{M}\sum_0^{M-1} y(t-k\theta) = x(t) + \frac{1}{M}\sum_0^{M-1} b(t-k\theta) = x(t) \text{si } M \to \infty. \tag{13.25}$$

Le rapport signal sur bruit se calcule en déterminant l'espérance et la variance de $z(t)$, soit

$$E[z(t)] = E[x(t)] + \frac{1}{M}\sum_0^{M-1} E[b(t-k\theta)] = x(t), \tag{13.26}$$

et

$$\sigma^2[z(t)] = E\left[\left(\frac{1}{M}\sum_0^{M-1} b(t-k\theta)\right)^2\right] = \frac{1}{M^2}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{M-1} E[b(t-k\theta)b(t-l\theta)]. \tag{13.27}$$

Or

$$E[b(t-k\theta)b(t-l\theta)] = \gamma_b((k-l)\theta) = \sigma^2\delta(k-l), \tag{13.28}$$

et de ce fait

$$\sigma^2[z(t)] = \frac{1}{M^2}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{M-1} \sigma^2\delta(k-l) = \frac{1}{M^2}\sum_{k=0}^{M-1}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{M}. \tag{13.29}$$

Le rapport signal sur bruit est donc de

$$SNR = M\frac{x^2}{\sigma^2}. \tag{13.30}$$

Application : oscilloscope rémanent.

13.4 Mesure de décalage temporel de deux signaux

Il existe deux méthodes pour mesurer le décalage temporel de deux signaux (Fig. 13.1 (a)), l'un dans le domaine temporel et l'autre dans le domaine spectral.

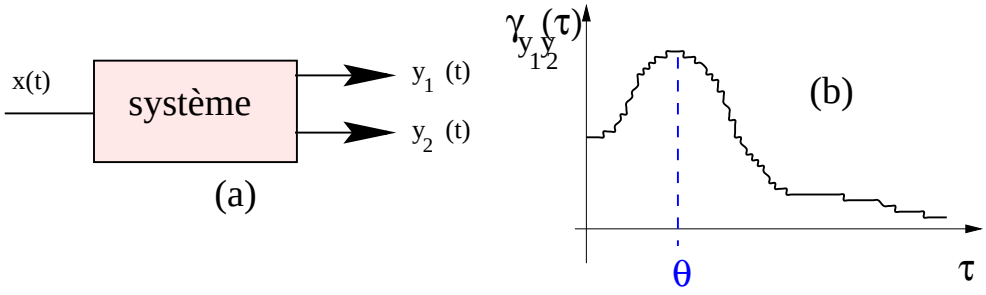


FIGURE 13.1 – *Mesure de décalage temporel de 2 signaux*

13.4.1 Méthode 1 : l'intercorrélation

On calcule la fonction d'intercorrélation des signaux $y_1(t) = b(t)$ et $y_2(t) = \alpha b(t-\theta)$ où θ est le décalage temporel à mesurer :

$$\gamma_{y_1y_2} = E[\alpha b(t-\theta)b(t-\tau)], \tag{13.31}$$

qui donne

$$\gamma_{y_1y_2} = E[\alpha b(u)b(u+\theta-\tau)] = \alpha\gamma_{bb}(\tau-\theta), \tag{13.32}$$

en posant $t-\theta = u$. Mais d'après la propriété $\gamma(0) \geq \gamma(\tau)\ \forall\ \tau$, on montre que la fonction d'intercorrélation est maximale lorsque $\tau = \theta$ (Fig. 13.1 (b)).

13.4.2 Méthode 2 : l'interspectre

Dans le domaine spectral, la détermination du retard θ peut également être effectuée. L'interspectre est défini par

$$S_{y_1y_2} = TF[\gamma y_1 y_2] = \alpha TF[\gamma_{bb}(\tau - \theta)] = \alpha e^{-2i\pi\nu\theta} S_{bb}(\nu). \tag{13.33}$$

Sachant que $S_{bb}(\nu)$ est réelle, l'argument de $S_{y_1y_2}$ est alors donnée par

$$\arg(S_{y_1y_2}(\nu)) = 2\pi\nu\theta, \tag{13.34}$$

qui nous permet d'accéder directement au paramètre θ par

$$\theta = \frac{1}{2\pi\nu} \arg(Sy_1y_2(\nu)). \tag{13.35}$$

Les applications sont nombreuses :

✓ localisation de sources de bruit
✓ mesures de distances (RADAR)
✓ mesures de temps de vol...

13.4.3 Mesure de retard (cas de signaux de formes quelconques)

Exemple 1

Il est également possible de mettre en évidence différents chemins de propagation et mesurer le coefficient d'atténuation du à cette propagation (Fig. 13.2)

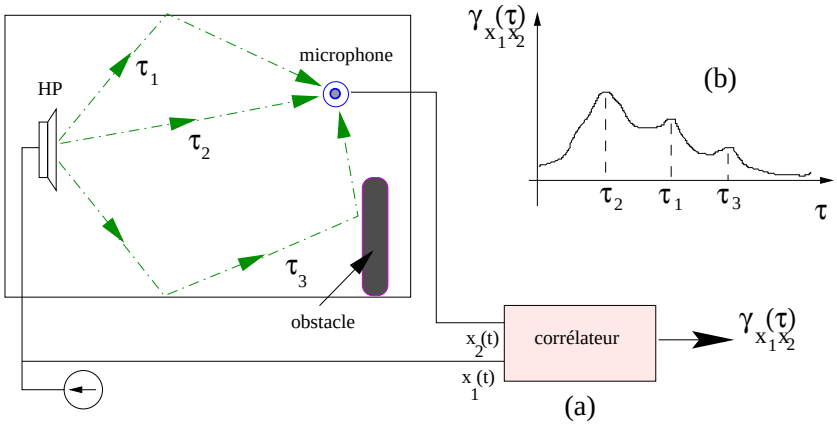


FIGURE 13.2 – *Mesure de temps de propagation par intercorrélation*

Exemple 2

On utilise également l'intercorrélation des signaux provenant d'électrodes placées sur un muscle. La détection et la mesure de la cohérence de fonctionnement des cellules musculaires peut alors être effectuée.

13.5 Détection synchrone

13.5.1 Objectif de la détection synchrone

Il s'agit de détecter un signal périodique noyé dans un signal parasite qui peut être soit un bruit , soit un autre signal périodique, comme le parasitage par les signaux à 50 Hz du secteur.

$\hookrightarrow$ on cherche $x(t+T) = x(t) \Rightarrow x(t) = \sum_n A_n \cos(\omega_n t + \phi_n)$

$\hookrightarrow$ on observe $y(t) = x(t) + b(t)$.

13.5.2 Démodulation synchrone

Observons la fréquence et l'amplitude du fondamental $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi_0)$ par l'utilisation d'un mélangeur. On doit pour cela disposer d'un signal auxiliaire $z(t) = \cos(\omega t + \phi)$ (Fig. 13.3).

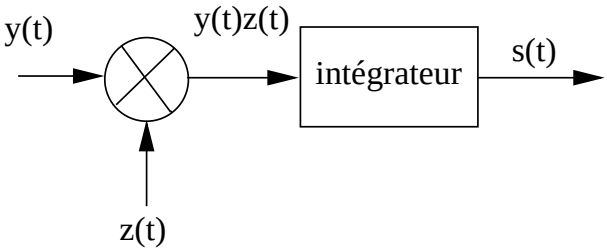


FIGURE 13.3 – *Mesure de temps de propagation par intercorrélation*

Dans ce cas, la sortie de l'intégrateur s'écrit :

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)z(t)dt \quad &= \frac{A}{2T}\int_0^T \cos((\omega+\omega_0)t + \phi_0 + \phi)dt \\ &+ \frac{A}{2T}\int_0^T \cos((\omega-\omega_0)t - \phi_0 + \phi)dt \\ &+ \frac{1}{T}\int_0^T b(t)\cos(\omega t + \phi)dt. \end{aligned} \tag{13.36}$$

Le premier et le troisième terme de la relation ci-dessus sont nul lorsque T tend vers l'infini et le second vaut

$$S = \frac{A}{2}\cos(\phi + \phi_0), \tag{13.37}$$

pour $\omega = \omega_0$. En se plaçant à $\phi = \phi_0 + k\pi$, on a $|S| = \frac{A}{2}$.

13.5.3 Généralisation

Si l'on souhaite déterminer toute les composantes A_n et ϕ_n de la série, on injecte un signal $z(t)$ carré de décomposition

$$z(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi}\left[\cos\omega_0 t - \frac{1}{3}\cos 3\omega_0 t + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}\cos(2n+1)\omega_0 t\right]. \tag{13.38}$$

La démodulation synchrone des composantes de pulsation $\omega_0, 3\omega_0, \ldots$ donnera des gains :

$$\omega_0 \twoheadrightarrow \frac{1}{2}\frac{4}{\pi};\ 3\omega_0 \twoheadrightarrow \frac{1}{2}\frac{4}{3\pi};\ 5\omega_0 \twoheadrightarrow \frac{1}{2}\frac{4}{5\pi}\ldots \tag{13.39}$$

13.5.4 Calcul du rapport signal sur bruit

On rappelle la définition du SNR :

$$SNR = \frac{E[S]^2}{\sigma^2(S)}. \tag{13.40}$$

Avec $\phi = 0$, on a l'expression

$$S = \frac{1}{T}\int_0^T A\cos^2\omega_0 t dt + \frac{1}{T}\int_0^T b(t)\cos\omega_0 t dt, \tag{13.41}$$

pour laquelle on peut calculer

$$E[S] = \frac{A}{2} \Rightarrow E[S]^2 = \frac{A^2}{4} \text{ pour } T \text{ multiple de } T_0, \tag{13.42}$$

et, en utilisant l'équation (13.22)

$$\sigma^2[S] = E[(S - E(S))^2] = \frac{1}{T}\int_0^T b(t)\cos\omega_0 t dt = \frac{\sigma^2}{4BT}, \tag{13.43}$$

on arrive à l'expression du SNR par

$$SNR = \frac{A^2 BT}{\sigma^2}. \tag{13.44}$$

Sachant que le rapport signal sur bruit en entrée est

$$SNR = \frac{A^2}{2\sigma^2} \tag{13.45}$$

on a un gain $G = 2BT$ confirmant ainsi l'intérêt de la méthode.

Si on prend l'exemple du bruit blanc dans une bande B, on a $S_{bb} = \frac{\sigma^2}{2B}$, on obtient

$$SNR = \frac{A^2 T}{2S_{bb}}. \tag{13.46}$$

13.5.5 Intérêt et application de la détection synchrone

De nombreux phénomènes physiques produisent, dans le domaine des basses fréquences (quelques Hz), des signaux aléatoires dont la densité spectrale de puissance augmente vers les basses fréquences ; c'est le bruit en $1/f$.

Cette présence du bruit est génante pour la mesure des signaux à basse fréquence. On a recourt à la détection synchrone qui transfert le spectre du signal utile dans un domaine de fréquences plus favorable (Fig. 13.4). Dans ce cas, le bruit de basse fréquence du à la trans-

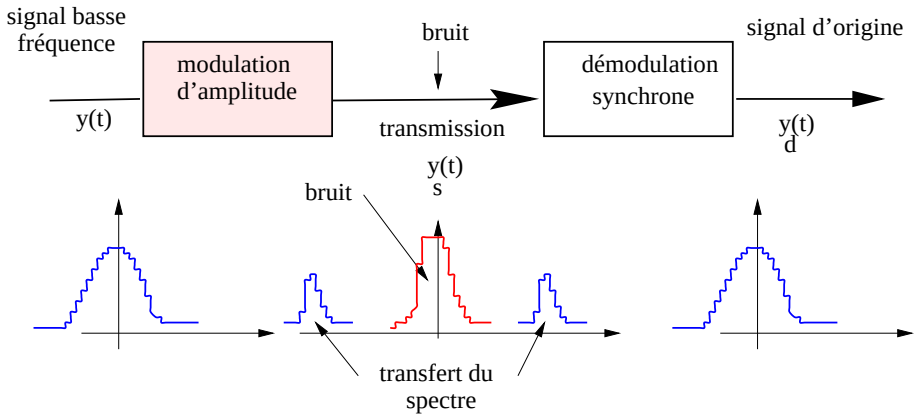


FIGURE 13.4 – *Transfert de spectre par modulation et démodulation synchrone*

mission n'intervient pas.

13.6 Estimation d'un signal par intercorrélation synchrone

Considérons un système physique excité par une certaine source d'excitation. La stimulation est supposée périodique (Fig. 13.5).

Calculons la fonction de corrélation entre le générateur de signaux périodiques $u(t)$ et la sortie $x(t)$ supposée bruitée :

$$\gamma_{ux}(\tau) = \gamma_{us}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)s(t+\tau)dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} u(t)s(t+\tau)dt, \tag{13.47}$$

car $\gamma_{ux}(\tau)$ est périodique.

On peut montrer que pour

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_f} rect\left(\frac{t-nT_0}{T_f}\right), \tag{13.48}$$

on a

$$\gamma_{ux}(\tau) = \frac{s(\tau)}{T_0} \tag{13.49}$$

où $s(\tau)$ est la valeur moyenne de $s(t)$ sur $[\tau - T_f/2; \tau + T_f/2]$.

En physique, on étudie souvent la réponse d'un système à une stimulation périodique (voir figure Fig. 13.6) en exploitant la nature répétitive de l'excitation.

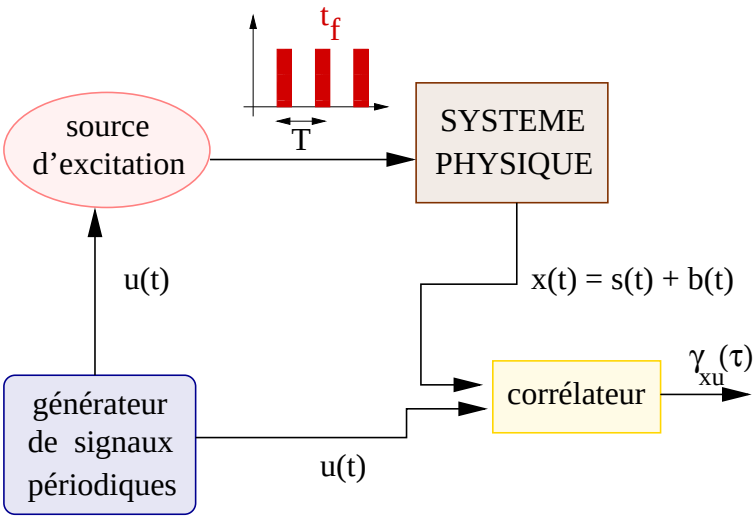


FIGURE 13.5 – *Caractérisation d'un système physique par intercorrélation synchrone*

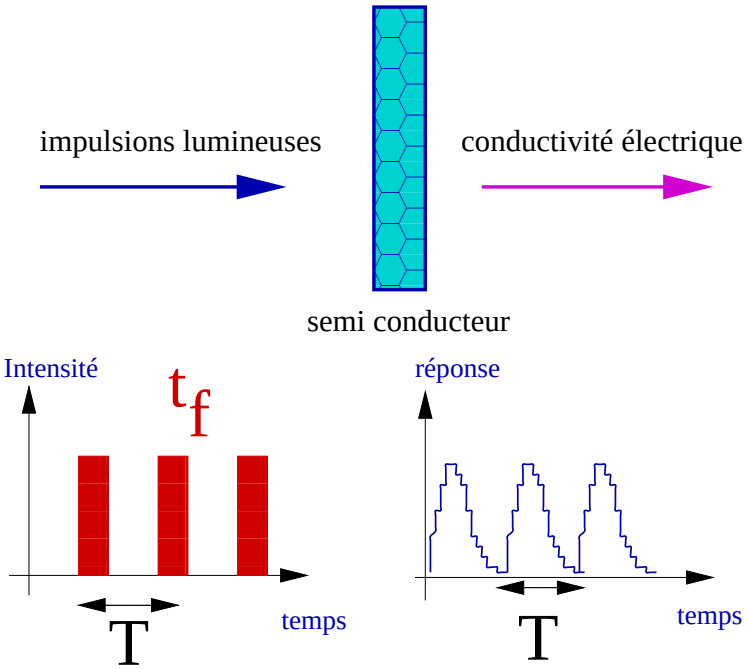


FIGURE 13.6 – *Estimation d'un signal par intercorrélation synchrone*

13.7 Identification d'un système en fonctionnement

L'identification des systèmes linéaires peut être effectuée par des méthodes d'intercorrélation. Étudions le système (supposé invariant dans le temps et linéaire) au voisinage d'un point de fonctionnement

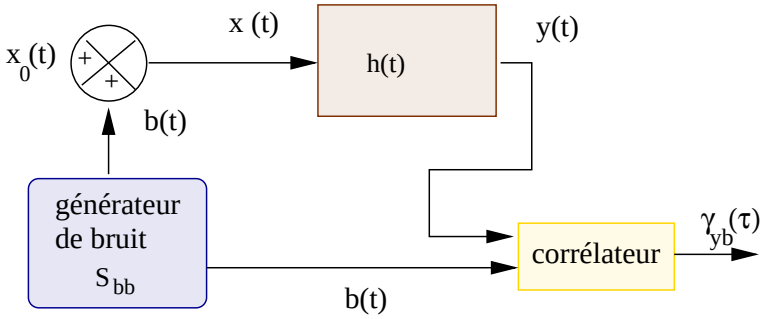


FIGURE 13.7 – *Identification d'un système linéaire en fonctionnement*

$$x(t) = x_0(t) + b(t). \tag{13.50}$$

La sortie s'écrit

$$y(t) = x(t) * h(t) = (x_0(t) + b(t)) * h(t) = x_0(t) * h(t) + b(t) * h(t). \tag{13.51}$$

De ce fait, la corrélation s'écrit :

$$\gamma_{by}(\tau) = E[y_0(t-\tau)b(t)] + E[b(t)y(t-\tau)] \tag{13.52}$$

où $y_0(t) = x_0(t) * h(t)$.

Le fait qu'il n'y ai pas de corrélation entre $y_0(t)$ et $b(t)$ donne

$$E[y_0(t-\tau)b(t)] = y_0(t-\tau)E[b(t)] = 0, \tag{13.53}$$

donc

$$\gamma_{by}(\tau) = \gamma_{by_0}(\tau) = \gamma_{bb} * h(\tau). \tag{13.54}$$

Comme pour un bruit blanc, on a $\gamma_{bb} = S_{bb}\delta(\tau)$, il vient

$$\boxed{\gamma_{by}(\tau) = S_{bb}\delta(\tau) * h(\tau) = S_{bb}h(\tau)}. \tag{13.55}$$

La fonction d'intercorrélation $\gamma_{by}(\tau)$ est donc directement proportionnelle à la réponse impultionnelle du système $h(\tau)$ en son point de fonctionnement.

13.8 Filtrage adapté

13.8.1 Définition

Un filtre adapté est un système linéaire optimisant la détection de signaux dans le bruit. Il optimise le rapport signal sur bruit à un instant t_1 de la décision.

Hypothèse : le bruit additif est indépendant

Soit un filtre de réponse $h(t)$ sur lequel on applique une entrée $e(t) = s(t) + b(t)$. La sortie $r(t) = s_1(t) + b_1(t)$ est observée à l'instant t_1. Le SNR s'écrit

$$SNR = \frac{|s_1(t_1)|^2}{b_1(t_1)b_1^*(t_1)} \tag{13.56}$$

avec

$$|s_1(t_1)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu)H(\nu)e^{2i\pi\nu t_1} d\nu \right|^2 \tag{13.57}$$

La puissance du bruit, supposé stationnaire du second ordre est

$$b_1(t_1)b_1^*(t_1) = \gamma_{b_1b_1}(\tau = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{b_1b_1}(\nu)|H(\nu)|^2 d\nu. \tag{13.58}$$

Si on suppose que $b(t)$ est un bruit blanc de puissance $S_{bb}(\nu) = \frac{N_0}{2}$, il vient

$$SNR = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu)H(\nu)e^{2i\pi\nu t_1} d\nu \right|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\nu)|^2 d\nu} \tag{13.59}$$

Montrons que cette inégalité possède une limite supérieure.

En utilisant l'inégalité de Schwartz

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\nu)F_2(\nu)d\nu \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(\nu)|^2 d\nu \int_{-\infty}^{\infty} |F_2(\nu)|^2 d\nu \tag{13.60}$$

et en posant $F_1(\nu) = H(\nu)$ et $F_2(\nu) = S(\nu)e^{2i\pi\nu t_1}$, il vient

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu)H(\nu)e^{2i\pi\nu t_1} d\nu \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H(\nu)|^2 d\nu \int_{-\infty}^{\infty} |S(\nu)|^2 d\nu \tag{13.61}$$

et de ce fait le SNR est borné supérieurement *i.e.*

$$SNR = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu)H(\nu)e^{2i\pi\nu t_1} d\nu \right|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\nu)|^2 d\nu} \leq \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\nu)|^2 d\nu. \tag{13.62}$$

La valeur maximale de l'inégalité de Schwartz sera atteinte si

$$F_1(\nu) = kF_2^*(\nu) \tag{13.63}$$

soit

$$\begin{aligned} H(\nu) &= S^*(\nu)e^{-2i\pi\nu t_1} \\ h(t) &= ks^*(t_1 - t). \end{aligned} \tag{13.64}$$

Si $s(t)$ est réelle, alors $h(t) = ks(t_1 - t)$.

13.8.2 Conséquences

- si le filtre est causal, $h(t) = 0$ si $t < 0$. On doit alors avoir $t_1 > T$ si $s(t)$ est un signal impultionnel de durée T.
- le signal de sortie est $s_1(t) = s(t) * h(t)$ est donc égal à $\gamma_{ss}(t - t_1)$. Il s'agit alors de la version décalée de la fonction d'autocorrélation qui est maximale à $t = t_1$.

Conclusion : le filtrage adapté est équivalent à un intercorrélateur comparant le signal bruité $e(t)$ à une réplique du signal à détecter.

Quatrième partie

Techniques avancées de Traitement du Signal

CHAPITRE 14

La transformation en Ondelettes

14.1 Préambule et historique

À la fin des années soixante Jean Morlet [1], alors qu'il travaillait chez Elf Aquitaine, devait transmettre des signaux sismiques depuis un terrain de prospection pétrolière vers la France à des fins d'analyse. La méthode utilisant la Transformée de Fourier conduisait à des quantités de nombres à transmettre, bien trop grandes au regard des capacités techniques de l'époque. En scrutant ces signaux, Jean Morlet eut l'intuition qu'il fallait utiliser un motif adapté à son problème et non pas la classique fonction sinus. L'ondelette de Morlet était née. On savait depuis longtemps que la décomposition de Fourier est d'autant plus efficace que le signal à représenter est régulier. A contrario, un signal discontinu comme un créneau, signal intervenant fréquemment en électronique, demande beaucoup de coefficients de Fourier. La force des ondelettes est d'être capable de représenter des signaux très irréguliers, comme l'attaque au violon, à l'aide d'un petit nombre de coefficients d'ondelettes. Il restait à inventer des algorithmes efficaces pour manipuler les représentations des signaux en ondelettes. C'est le mathématicien français Yves Meyer qui a permis cette avancée au début des années quatre-vingt, avec la construction de bases orthonormées d'ondelettes qui s'appuyait sur l'ondelette

1. Voir l'article complet dans "La Recherche", Juin 2003 par Jean-Michel Ghidaglia

qui porte depuis son nom.

Une base orthonormées est l'analogue dans l'espace formé par les signaux des trois axes de coordonnées que nous utilisons comme repère dans l'espace qui nous entoure. Un des principaux intérêts des bases orthonormées d'ondelettes est qu'elles permettent de travailler sur les signaux exactement comme s'il s'agissait de points dans l'espace. ll est ainsi possible, de trouver facilement les coordonnées d'un signal dans la base d'ondelettes ou de faire une opération géométrique comme la projection sur un plan. L'intérêt de ces opérations : elles interviennent constamment lorsqu'on analyse ou que l'on comprime un signal

Aujourd'hui les ondelettes sont devenues un des outils de base pour le traitement du signal et des images. Elles ont en particulier la propriété de pouvoir représenter très économiquement des détails très fins (haute fréquence) et grossiers simultanément ce qui n'est absolument pas le cas pour la Transformée de Fourier. De nombreux travaux comme l'analyse fine des fluctuations boursières, ont été rendus possibles grâce à cet outil. Les ondelettes permettent de comprimer très économiquement les images, qui sont des signaux en deux dimensions. Aujourd'hui les recherches s'orientent vers l'utilisation d'ondelettes pour calculer des solutions de modèles mathématiques comme ceux qui décrivent la turbulence dans les fluides ou les phénomènes non linéaires en général. Il s'agit de travaux en cours, et la communauté des chercheurs ne sait toujours pas si cette voie débouchera sur une nouvelle méthode efficace.

14.2 La transformée de Fourier à fenêtre glissante

Le principe de base de la transformation en ondelettes émerge des propriétés de la transformée de Fourier à fenêtre glissante qui peuvent être intuitivement abordées avec la FFT glissante et pondérée.

Considérons un signal $s(t)$ pondéré par une fenêtre temporelle de pondération réelle $g_{fen}(t)$, centrée autour du temps α. Le signal résultant, paramétré par α peut s'écrire

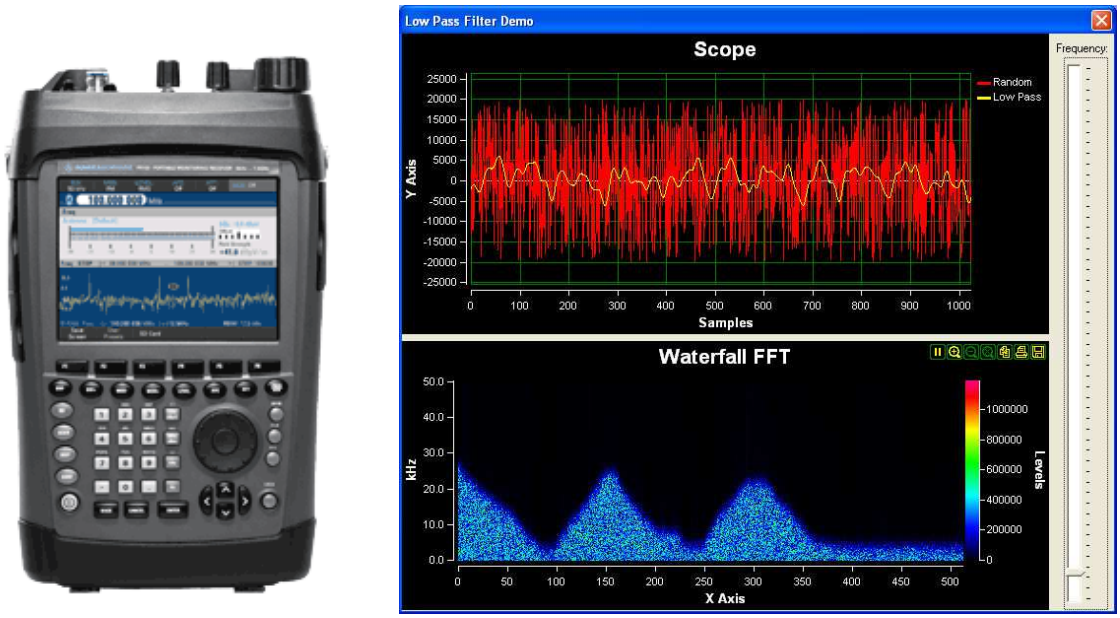
$$s_{\Pi,\alpha}(t) = s(t).g_{fen}(t-\alpha). \tag{14.1}$$

Le spectre de ce signal, paramétré aussi par α, est obtenu à partir de la transformée de Fourier : *i.e.*

$$S_{\Pi,\alpha}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_{\Pi,\alpha}(t)e^{-2j\pi\nu t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t).g_{fen}(t-\alpha)e^{-2j\pi\nu t}dt. \tag{14.2}$$

Cette transformée de Fourier, ou plus exactement cet ensemble de transformées de Fourier, est appelé la transformée de Fourier à fenêtre glissante, désormais communément appelées fonc-

tion "chute d'eau", comme proposé, par exemple, par le système PR100 de Rohde-Schwarz présenté en figure 14.1



(a) Récepteur (b) Fonction "chute d'eau"

FIGURE 14.1 – *Récepteur PR100 de radiosurveillance portable Rohde & Schwartz (gamme de fréquence : 9 kHz-7,5 GHz) avec affichage simultané du spectre RF et de la fonction "chute d'eau"*

Nous pouvons remarquer que cet ensemble de transformées de Fourier, paramétrées par α, contient plus d'informations que nécessaire pour reconstruire le signal initial non tronqué, *i.e.*

$$s(t) = \int\int_{\mathbb{R}^2} S_{\Pi,\alpha}(\nu) g_{fen}(t-\alpha) e^{-2j\pi\nu t} d\nu d\alpha. \tag{14.3}$$

Dans le cas où l'on considère une fenêtre de pondération de type Gauss

$$g_{gen}(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}.\Pi_\tau(t), \tag{14.4}$$

nous avons une transformée de Fourier à fenêtre glissante, dite transformée de Gabor :

$$S_{\Pi,\alpha}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t).e^{-\frac{(t-\alpha)^2}{2}} e^{-2j\pi\nu t} dt. \tag{14.5}$$

Remarque : les transformées de Fourier et de Gabor peuvent être interprétées comme une décomposition sur une base de fonctions sinusoïdales pour la première (décomposition en série de Fourier) et sur une base de fonctions sinusoïdales dont l' enveloppe est une gaussienne centrée en α.

L'avantage de la transformée de Gabor sur celle de Fourier concerne les signaux de durée finie ayant une répartition limitée en fréquence, le calcul de la transformée de Fourier nécessitant dans ce cas un traitement numérique de précision sur une durée longue (annulation des composantes fréquentielles élevées).

14.3 Principe de base de la transformée par ondelettes

Le but de ce paragraphe est simplement de donner les idées de base de cette analyse par ondelettes, actuellement encore peu répandue. Le principe de base est d'utiliser des fenêtres de pondération de fonction réelle $g_{fen,\alpha,\beta}(t)$; qui sont centrées autour d'un temps α et liées par un rapport d'homothétie de β. Ainsi nous avons l'ensemble exprimé par :

$$g_{fen,\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} g_{fen}\left(\frac{t-\alpha}{\beta}\right) \text{ avec} \alpha \in \mathbb{R} \text{ et} \beta > 0. \tag{14.6}$$

La fonction génératrice $g_{fen}(t)$ est appelée ondelette mère. La transformée par ondelettes d'un signal $s(t)$ aura donc pour expression de ces coefficients :

$$\mathcal{O}_s(\alpha,\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) g_{fen,\alpha,\beta}(t) dt. \tag{14.7}$$

Ce calcul de la transformée par ondelettes peut être vu comme une "comparaison" du signal avec un signal de base (ondelette mère) décalé temporellement et comprimé ou dilaté.

De la même manière que pour la transformée de Gabor, il est possible de reconstruire le signal initial en connaissant les coefficients de la transformée par ondelettes. Soit l'expression de $s(t)$ à une constante près :

$$s(t) = \int\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\beta^2} \mathcal{O}_s(\alpha,\beta) g_{fen,\alpha,\beta}(t) d\alpha d\beta \tag{14.8}$$

La fonction ondelette-mère doit posséder les propriétés suivantes :

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} g_{fen}^2(t) dt} = 1, \tag{14.9}$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G_{fen}(f)|^2}{|f|} df = k \text{ avec } k \text{ borné.} \tag{14.10}$$

Différentes fonctions ondelettes qui respectent les propriétés précédentes sont utilisées :

– **ondelettes de Morlet**

$$g_{fen}(t) = e^{-t^2/2} \cos(5t) \tag{14.11}$$

– **ondelettes de Haar**

$$\begin{aligned} g_{fen}(t) &= 1 \text{ pour } 0 < t < 1/2, \\ g_{fen}(t) &= -1 \text{ pour } 1/2 < t < 1, \\ g_{fen}(t) &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned} \tag{14.12}$$

– **ondelette obtenue par dérivées de gaussiennes** (exemple de la dérivée seconde)

$$g_{fen}(t) = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt[4]{\pi}}(1-t^2)e^{-t^2/2}. \tag{14.13}$$

14.4 Exemple de transformée par ondelettes

La mise en oeuvre numérique nécessite de restreindre les intervalles de variation de α et β. Ainsi, nous avons la fonction-ondelette couramment utilisée :

$$g_{fen,m,n}(t) = 2^{m/2} g_{fen}(2^m(t - n2^{-m})) \text{ avec} m, n \in \mathbb{N}. \tag{14.14}$$

En accroissant m, le temps est compressé et donc la fréquence centrale et la largeur de bande sont dilatées. Le paramètre m peut être considéré comme un facteur d'échelle et 2^{-m} comme un pas d'échantillonnage. Si on considère F_0 comme la fréquence centrale de la fenêtre $g_{fen,m,n}(t)$, celle-ci peut varier selon $2^{-m}F_0$. Ainsi il est possible d'ajuster le facteur d'échelle m pour déceler les différentes fréquences contenues dans le signal.

Considérons un signal constitué de la succession de deux sinusoïdes de périodes respectives T_0 et $T_0/2$ (Fig.14.2 (a)), limitées pour chacune à une période, soit

$$s(t) = \sin(2\pi f_0 t)\Pi_{T_0/2}(t - T_0/2) + \sin(2\pi(2F_0)t)\Pi_{T_0/4}(t - (T_0 + T_0/4) \tag{14.15}$$

En utilisant la transformée de Fourier, le spectre de ce signal s' exprime par la relation complexe suivante :

$$\begin{aligned} S(\nu) = \frac{1}{i\pi} \quad & \left[\cos\left(\pi\frac{T_0}{2}\nu\right) e^{-2i\pi\nu T_0/2}\frac{\nu}{\nu^2 - F_0^2}\right. \\ & \left. + \cos\left(\pi\frac{T_0}{4}\nu\right) e^{-2i\pi\nu(T_0+T_0/4)}\frac{\nu}{\nu^2 - 4F_0^2}\right] \end{aligned} \tag{14.16}$$

Cette représentation ne facilite pas la compréhension du spectre du signal $s(t)$. Considérons maintenant une analyse par ondelettes en utilisant comme fonction ondelette mère une seule période d'une sinusoïde

$$g_{fen,m,n}(t) = 2^{m/2}\sin(2^m(t - n2^{-m})) \text{ avec} m, n \in \mathbb{N}. \tag{14.17}$$

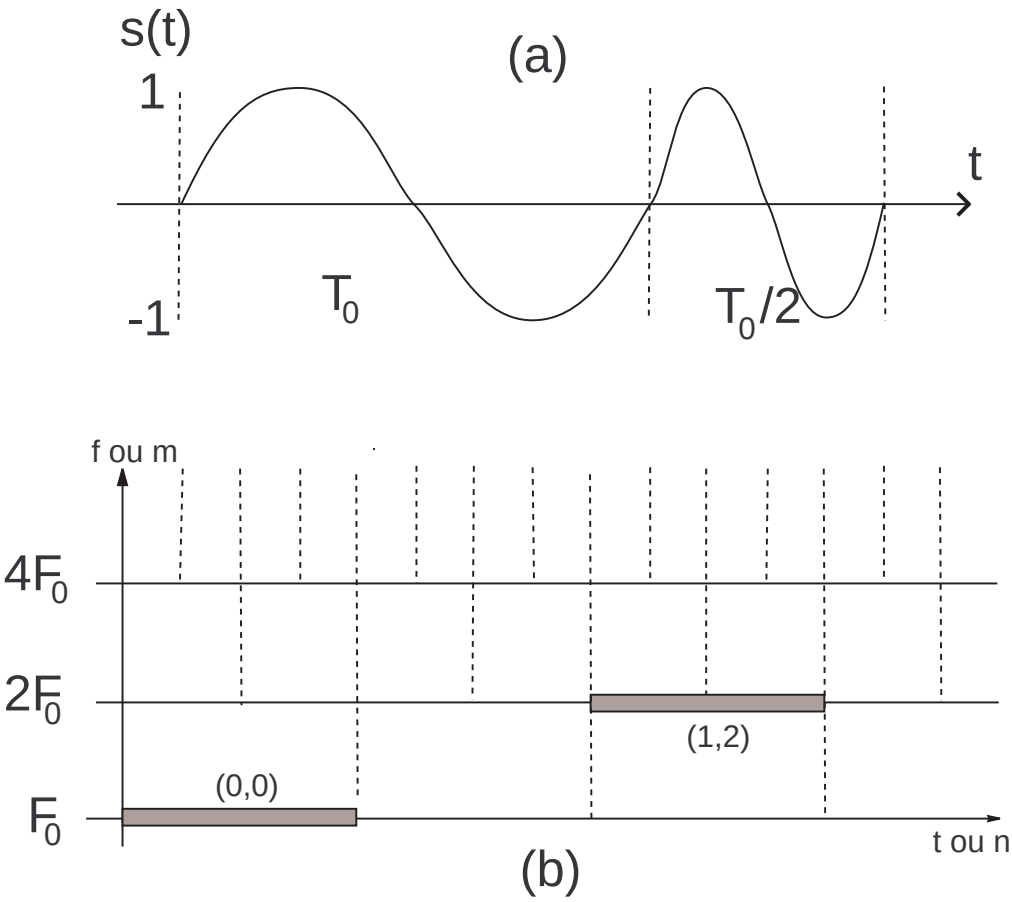


FIGURE 14.2 – *Représentation d'une transformée par ondelettes. (a) Signal temporel $s(t)$. (b) Transformée en ondelettes dans sa représentation bidimentionnelle temps-fréquence*

soit par exemple

$$\begin{aligned} g_{fen,1,0}(t) &= \sqrt{2}\sin(2t) \text{ avec } T_0 = 1/2 \text{ et } 0 < t < \pi, \\ g_{fen,0,0}(t) &= \sin(t) \text{ avec } T_0 = 1 \text{ et } 0 < t < 2\pi, \end{aligned} \tag{14.18}$$

Le calcul de la transformée par ondelettes consiste à calculer les coefficients selon la relation (14.7) ou encore à comparer les différentes fonctions ondelettes comprimées et décalées avec le signal. Il vient

$$\mathcal{O}_s(m,n) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) g_{fen,m,n}(t) dt. \tag{14.19}$$

soit

- $\mathcal{O}_s(0,0) = 1$
- $\mathcal{O}_s(0,1) = 0$

- $\mathcal{O}_s(1,0) = 0$
- $\mathcal{O}_s(1,1) = 0$
- $\mathcal{O}_s(1,2) = 1$
- $\mathcal{O}_s(1,3) = 0$

Il est possible de représenter cette transformée par ondelettes dans un diagramme fréquence temps (Fig.14.2 (b)). Cette représentation montre que la transformée par ondelettes indique non seulement le contenu en fréquence mais aussi les instants d'existence de ces fréquences.

Cette transformée par ondelettes est particulièrement utile pour l' analyse de signaux présentant des discontinuités, comme les signaux carrés, les signaux avec des parasites impulsionnels, ou des signaux présentant des nonlinearités (Fig.14.3). Cette transformée par ondelettes s'applique à des problèmes très variés :

- ⊠ une analyse dite multi-échelle : différents niveaux de paramètrage des fonctions ondelettes
- ⊛ une analyse avec suppression de tendance : annulation d'une valeur moyenne en évolution en utilisant une analyse multi-échelle
- ⊟ une analyse avec suppression du bruit : choix des ondelettes-mères en adéquation avec le type de signal à extraire du bruit

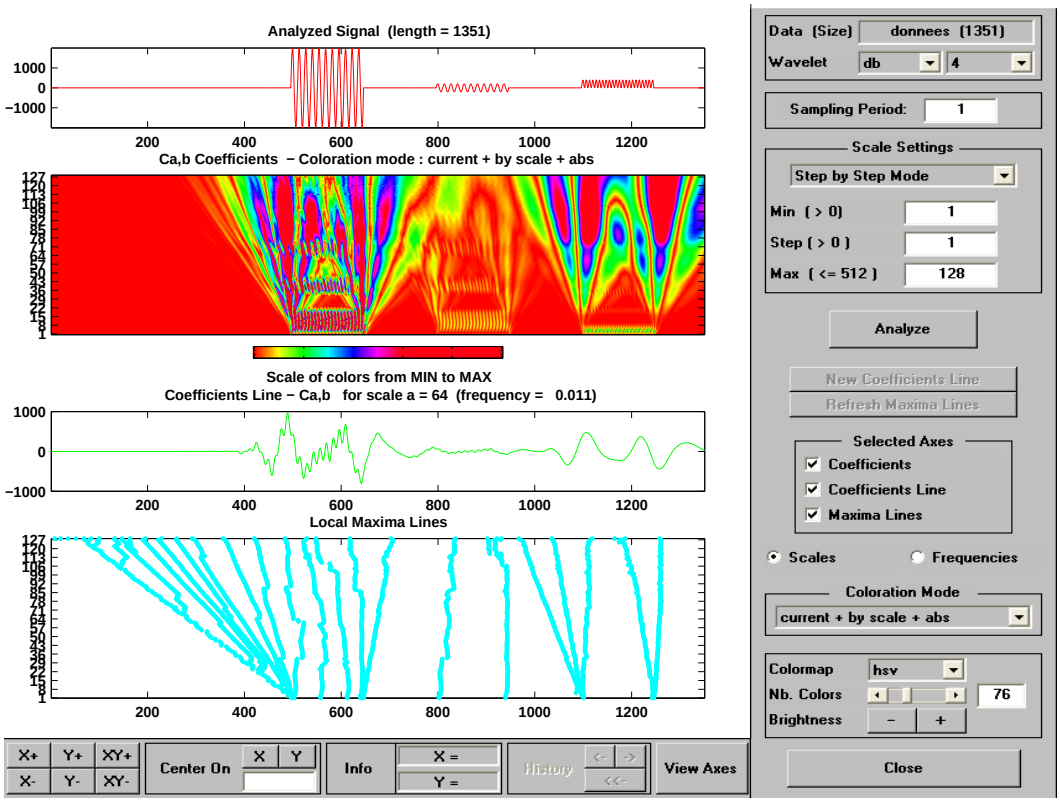


FIGURE 14.3 – *Interface utilisateur de la commande* `wavemenu` *de Matlab : transformée par ondelettes*

Annales d’examens - Juin 2001

Examen de Traitement du Signal

Mercredi 16 Mai 2001 14h

Durée : 2 heures

Les trois exercices indépendants devront être rédigés sur des copies séparées. Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats. Les notes **personnelles** de cours, Travaux Dirigés et Travaux Pratiques sont autorisées.

Ce sujet comporte 5 pages.

Exercice 1 (8 points) : Signal RADAR

Le RADAR est un instrument destiné à déterminer la position d'une cible (avion) dans l'espace. Il comprend une antenne émettrice constituée par un paraboloïde de révolution alimenté par un cornet hyperfréquence placé en son foyer (Fig.14.63). L'onde émise $x(t)$ est une succession périodique d'impulsions radiofréquence de fréquence f_0, de durée τ et de période de répétition T. L' onde incidente se propage dans l' espace libre en direction de la cible. Elle est réfléchie par celle-ci dans tout l'espace. Une partie du signal réfléchi est capté par l'antenne avant l'émission d'un nouveau train d'ondes. Le signal reçu par l'antenne est donc un signal semblable au signal incident, fortement atténué par le trajet aller-retour et retardé du temps de propagation correspondant t_d.

I. Grandeurs temporelles caractéristiques du signal radar

Soit r la distance de l'avion à l'antenne.

1. Déterminer la relation entre le retard t_d et la distance r
2. Quelle doit être la durée maximum τ des impulsions pour mesurer une distance de 150 m (Radar d'atterrissage)

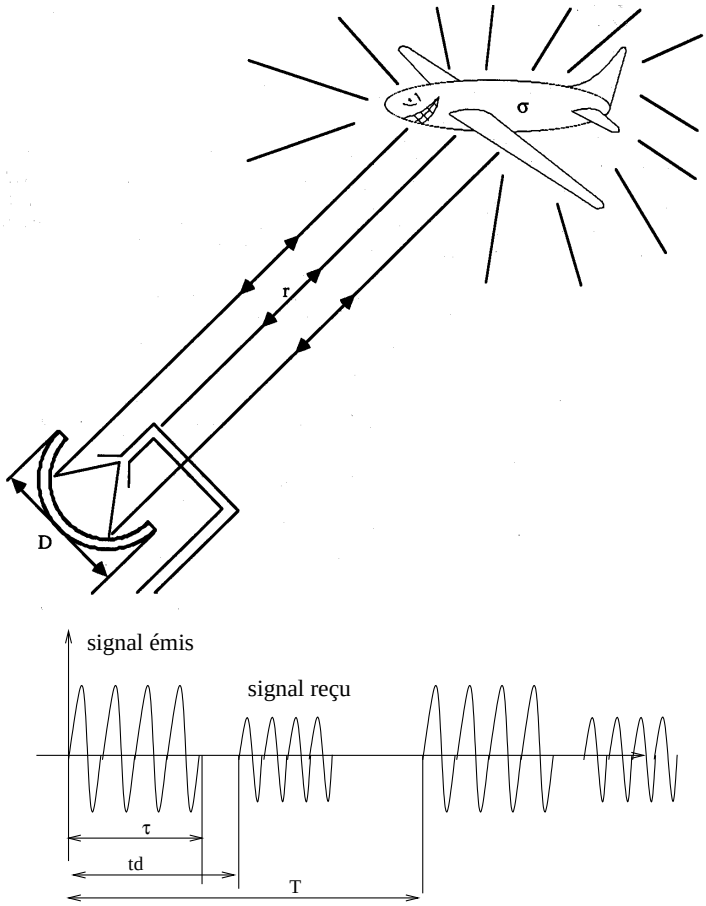


FIGURE 14.4 – Description du radar

3. Si on appelle P la portée du radar, quelle est la limite inférieure de la période de répétition T pour que la portée soit égale à 150 km
4. En déduire la bande spectrale minimale dans laquelle on doit concevoir ce radar pour répondre à cette application

II. Propriétés temporelles du signal radar

1. Comment peut-on écrire un signal périodique en utilisant les distributions
2. En déduire une expression de $x(t)$ en fonction de la fonction peigne de Dirac, de la fonction porte et de la fonction $\cos(\omega_0 t)$

III. Propriétés spectrales du signal radar

1. Avant même de calculer la Transformée de Fourier du signal radar, quelles caractéristiques peut-on donner du spectre du signal. Exprimer surtout celle concernant la

continuité du spectre.

2. Montrer que le module du spectre $\left|X(\nu)\right|$ s'exprime par

$$\left|X(\nu)\right| = \frac{\tau}{T}\left[\frac{\sin \pi(\nu-\nu_0)\tau}{\pi(\nu-\nu_0)\tau}\sqcup\!\!\sqcup_{1/T}(\nu-\nu_0) + \frac{\sin \pi(\nu+\nu_0)\tau}{\pi(\nu+\nu_0)\tau}\sqcup\!\!\sqcup_{1/T}(\nu+\nu_0)\right] \tag{14.20}$$

3. Représenter schématiquement l'allure du spectre
4. Calculer l'occupation spectrale B du signal $x(t)$ est définie par la largeur de l'intervalle $[-\nu_1;\nu_1]$ où ν_1 est le premier zéro de la fonction sinus cardinal.
5. Discuter l'influence de la durée τ de l'emission du signal sur l'amplitude des raies spectrales et sur l'occupation spectrale.
6. Quel est le principe fondamental en Théorie du Signal qui est vérifié.

Exercice 2 (7 points) : Filtrage du bruit pas moyennage

Soit le système décrit par la figure Fig.14.60. permettant d'analyser un signal $s(t)$. Le bruit $n(t)$ est supposé stationnaire, ergodique et non corrélé avec le signal $s(t)$. La réponse temporelle du filtre est notée $f(t)$.

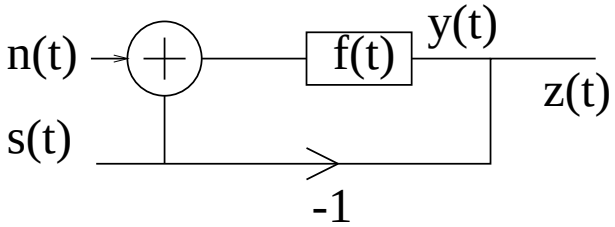


FIGURE 14.5 – Principe schématique du filtrage du signal $s(t)$

1. Calculer la fonction de corrélation $\gamma_z(\tau)$ en fonction des corrélations $\gamma_s(\tau)$, $\gamma_y(\tau)$, $\gamma_{ys}(\tau)$ et $\gamma_{sy}(\tau)$
2. Exprimer $y(t)$ en fonction de $f(t)$, $n(t)$ et $s(t)$.
3. Exprimer la fonction de corrélation $\gamma_y(\tau)$ sous la forme d'un produit de convolution
4. Expliquer pourquoi on peut appliquer le théorème de Wiener-Kinchine au signal $y(t)$. Montrer que

$$S_y(\nu) = \left|F(\nu)\right|^2 (S_n(\nu) + S_s(\nu)) \tag{14.21}$$

$$S_{sy}(\nu) = F^*(\nu)S_s(\nu) \tag{14.22}$$

$$S_{ys}(\nu) = F(\nu)S_s(\nu) \tag{14.23}$$

5. En déduire que

$$S_z(\nu) = \left|F(\nu)\right|^2 S_n(\nu) + \left|F(\nu) - 1\right|^2 S_s(\nu). \tag{14.24}$$

6. Interpreter ce résultat lorsque $\nu \to 0$ dans le cas ou $F(\nu)$ est la réponse fréquentielle d'un filtre moyenneur

Exercice 3 (5 points) : Caractérisation spectrale de signaux par FFT

Les figures 3, 4 et 5 suivantes correspondent à une copie d'écran d'un oscilloscope numérique de type HP 33120A d'un signal délivré par un générateur de signaux HP 54645A. Sur chaque figure, le signal du haut représente le signal temporel et celui du bas le spectre FFT. Les réglages ne diffèrent que par leur base de temps (10 μs, 100 μs, 1 ms).

1. Commenter le spectre FFT de la figure 3
2. Commenter le spectre FFT de la figure 5. En déduire une mesure des fréquences du signal.

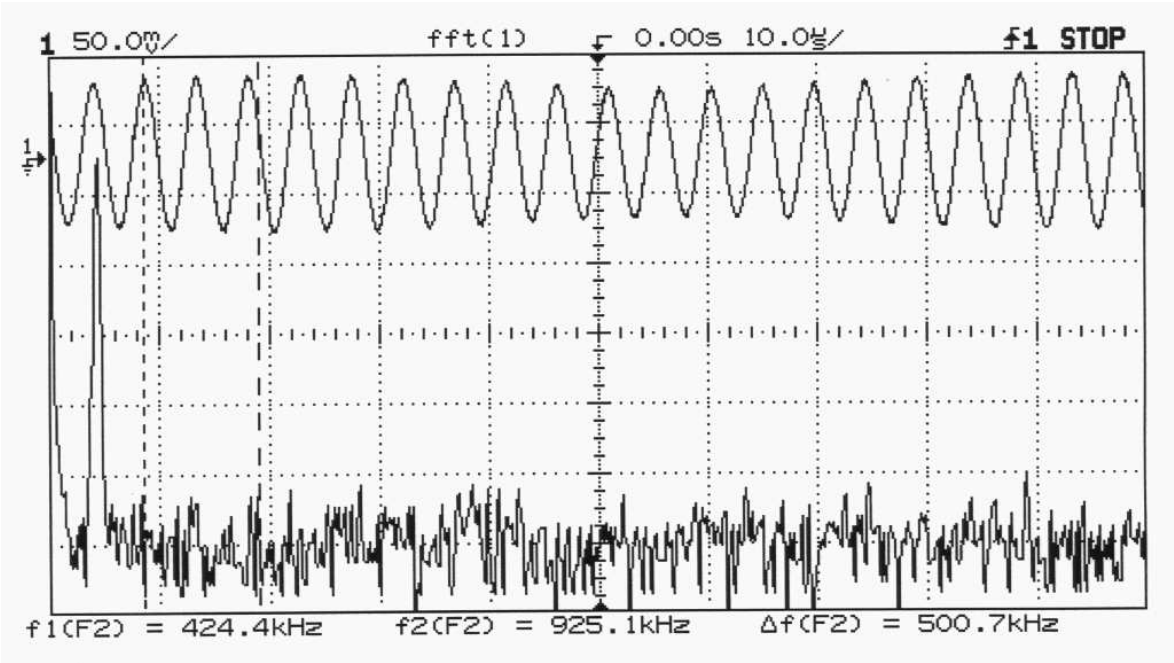


FIGURE 14.6 – Base de temps : 10 μs

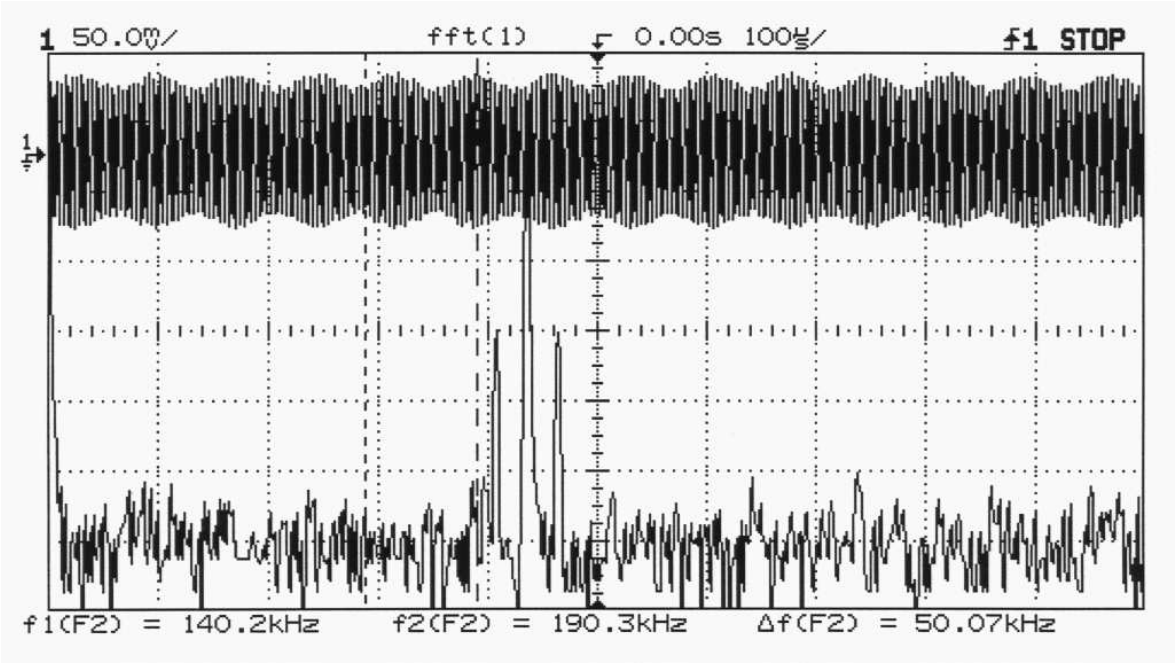


FIGURE 14.7 – Base de temps : 100 μs

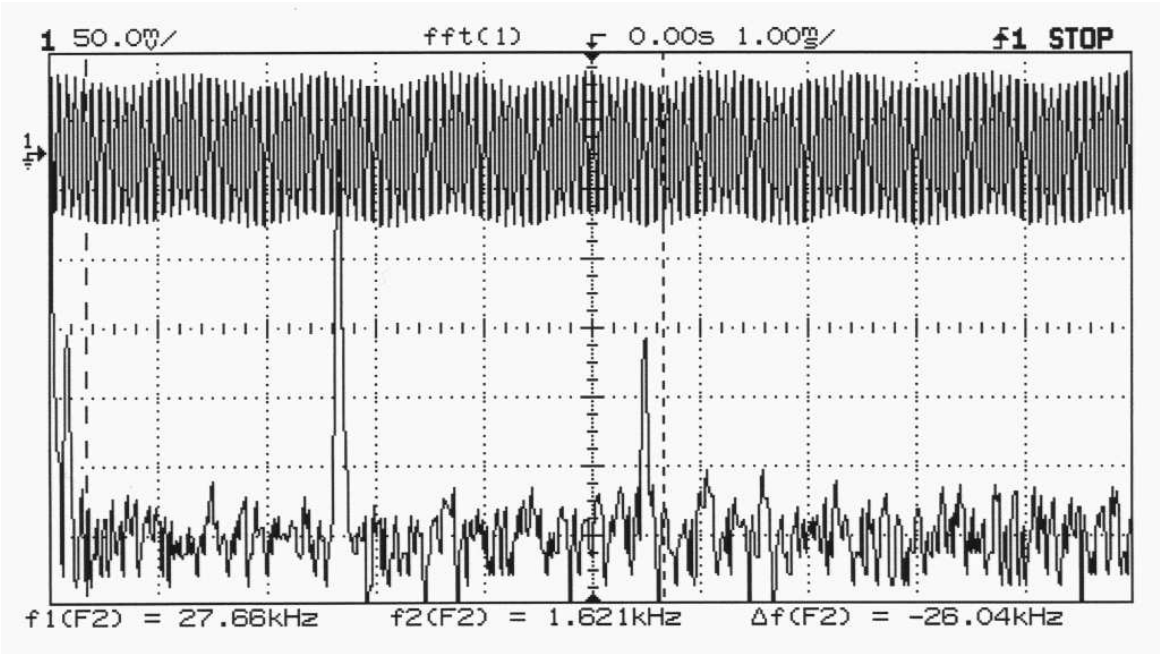


FIGURE 14.8 – Base de temps : 1 ms

Annales d’examens - Septembre 2001

Oral de Traitement du Signal

Lundi 3 Septembre 2001, 16h

Durée : 15 mn de préparation + 15 mn de présentation

But de l'oral

Interpreter les images de l'article de la Recherche (Mai 2001) concernant les défauts du DVD et d'expliquer le phénomène mis en relief dans le cas d'un signal temporel.

Indications

Pour préparer votre présentation pensez à :

- à quelle partie du cours puis-je faire référence ?
- comment présenter le phénomène dans le cas 2D (cas d'une image). Considérer par exemple une image constituée d'un rectangle ($11T_c \times 9T_l$) possédant 6 colonnes noires et 5 colonnes blanches. T_l et T_c correspondent respectivement à la période spatiale suivant les lignes et suivant les colonnes. Pour le calcul de la TFD en 2D, l'échantillonnage spatial pourra être choisi à $4T_l$ et $1T_c$. Dans l'article, on peut alors interpréter les grosses bandes noires présentes sur l'image de droite et non présentes sur l'image de gauche (On parle de rayures rouges dans l'article).

Rappel

- Définition de la Transformée de Fourier Discrète en 1D

$$X(k) = \sum_{0}^{N-1} x(n)e^{-2j\pi kn/N}, \;\; k = 0, 1, ..., N-1 \tag{14.25}$$

- Définition de la Transformée de Fourier Discrète en 2D

$$X(k_1, k_2) = \sum_{(n,m=0,0)}^{(N-1,M-1)} x(n,m)e^{-2j\pi(k_1 n + k_2 m)/NM}, \;\; (k_1, k_2) = (0,0), ..., (N-1, M-1) \tag{14.26}$$

Annales d’examens - Juin 2002

Examen de Traitement du Signal

Mercredi 5 Juin 2002

Durée : 2 heures

Les trois exercices indépendants devront être rédigés sur des copies séparées. Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats. Les notes **personnelles** de cours, Travaux Dirigés et Travaux Pratiques sont autorisées **à l'exclusion de tout autre document**.

Ce sujet comporte 4 pages et une annexe.

Exercice 1 (8 points) : Échantillonnage pratique

Le processus d'échantillonnage des signaux en vue de leur traitement et de leur analyse est réalisé avec un système que l'on peut supposer linéaire, invariant dans le temps et à temps de réponse non nul ; suivi d'un interrupteur (Fig.14.9). On suppose que les instants de fermeture de l'interrupteur sont notés $t_f = nT_e$ où T_e est la période d'échantillonnage. Le signal à échantillonner $x(t)$ sera supposé à bande limité.

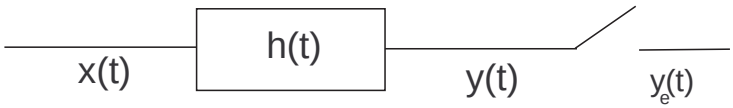


FIGURE 14.9 – Échantillonnage pratique

A. Expression générale du signal de sortie

1. Exprimer $y(t)$
2. Soit $y_e(t) = \sum_n y_n$ le signal échantillonné constitué des échantillons y_n. Exprimer y_n en fonction de $y(t)$ et d'une fonction de Dirac

3. Montrer alors que y_n s'exprime par

$$y_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(nT_e - \tau)d\tau. \tag{14.27}$$

B. Cas de l'échantillonneur moyenneur

On utilise l'échantillonneur moyenneur dont le fonctionnement est donnée par la figure Fig.14.10. Soit $y_e^M(t) = \sum_n y_n^M$ le signal échantillonné moyenné.

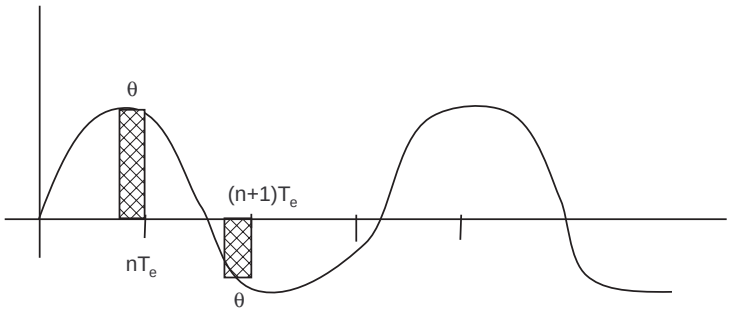


FIGURE 14.10 – Description de l'échantillonneur moyenneur

1. Question préliminaire. Écrire l'expression d'une porte $\Pi_\theta(t)$ de largeur θ translatée de $nT_e - \frac{\theta}{2}$
2. Exprimer y_n^M l'échantillon moyenné de $x(t)$ sur une durée θ.
3. En déduire que l'on peut écrire l'expression précédente par

$$y_n^M = \frac{1}{\theta}\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_\theta\left(t - nT_e + \frac{\theta}{2}\right) x(t)dt. \tag{14.28}$$

4. En déduire des relations (14.110) et (14.28) la réponse impultionnelle $h(t)$ du moyenneur.

C. Étude quantitative de la déformation du signal echantillonné

On désire reconstruire le signal initial en utilisant le signal échantillonné, en se plaçant dans les conditions de Shannon. On peut montrer que le spectre du signal reconstruit $X_{rec}(\nu)$ diffère du spectre initial $X(\nu)$ par

$$X_{rec}(\nu) = H(\nu)X(\nu), \tag{14.29}$$

où $H(\nu)$ est la fonction de transfert du moyenneur.

1. Expliquer pourquoi d'après (14.29), il existe deux types de distorsion du signal. Identifier et justifier la plus gênante.

2. Montrer que la distorsion en amplitude est maximale lorsque $\nu = \nu_m$, ν_m étant la fréquence maximale du signal $x(t)$.
3. Soit $\Delta = sinc(\pi\theta\nu_m)$ la distorsion maximale en amplitude. Calculer la valeur du rapport θ/T_e préconisé pour avoir une distorsion de moins de 10% du signal :
   a. avec un échantillonnage à la fréquence de Nyquist ν_N
   b. avec un sur-échantillonnage d'un facteur 5
4. Interpréter et conclure

Exercice 2 (8 points) : Somme de signaux aléatoires

Un signal $z(t)$ de transmission de données est constitué d'un signal $x(t)$ binaire antipolaire, perturbé par un bruit $y(t)$ gaussien, centré et indépendant de $x(t)$. Le signal $x(t)$ prend la valeur A avec une probabilité 2/3 et $-A$ avec une probabilité 1/3. Le signal $y(t)$ possède une densité spectrale de puissance $S_y(f) = \frac{1}{2}\eta\Lambda_{2B}(f)$, où Λ_{2B} est la fonction triangle centrée en 0 et de largeur $2B$.

A. **Propriétés statistiques du signal** $z(t)$

1. Calculer $E[x]$ et $\sigma^2(x)$.
2. Calculer la fonction de corrélation $\gamma_y(\tau)$ de $y(t)$. En déduire $\sigma^2(y)$.
3. En déduire les moments d'ordre 1 et 2 du signal $z(t)$. Application numérique : calculer la puissance (en dBm) du signal $z(t)$ avec $A = 3$V, η=2.10^{-6} V^2/Hz et $B = 1$ MHz.

B. **Détermination de la loi de probabilité** $p(z)$ **du signal** $z(t)$

1. Exprimer la fonction caractéristique $\Phi_z(\omega)$ du signal $z(t)$ en fonction de $\Phi_x(\omega)$ et $\Phi_y(\omega)$.
2. En déduire que la loi de probabilité $p(z)$ s'écrit :

$$p(z) = p(x) * p(y) \tag{14.30}$$

3. Écrire la loi de probabilité discrète $p(x)$ en la considérant au sens des distributions
4. En déduire l'expression de $p(z)$

$$p(z) = \frac{1}{3\sqrt{\pi\eta B}}\left[\exp\left(-\frac{(z+A)^2}{\eta B}\right) + 2\exp\left(-\frac{(z-A)^2}{\eta B}\right)\right] \tag{14.31}$$

Rappel :

$$\Lambda_{2B}(f) \rightleftharpoons B\left[\frac{\sin(\pi B\tau)}{\pi B\tau}\right]^2 \tag{14.32}$$

Exercice 3 (4 points) : Analyse spectrale numérique

L'acquisition numérique d'un signal issu d'un capteur de pression présente un spectre FFT donné par la figure Fig.14.22. La partie intéressante de ce signal correspond à des fluctuations lentes comprises dans la bande [0.5 Hz, 20 Hz].

1. Déterminer la fréquence d'échantillonnage du signal
2. Identifier les sources de perturbation du capteur
3. On désire avoir un spectre FFT plus précis en fréquence. Est-il possible d'utiliser les données numériques de ce signal en échantillonnant à 60 Hz. Justifier suffisamment votre réponse

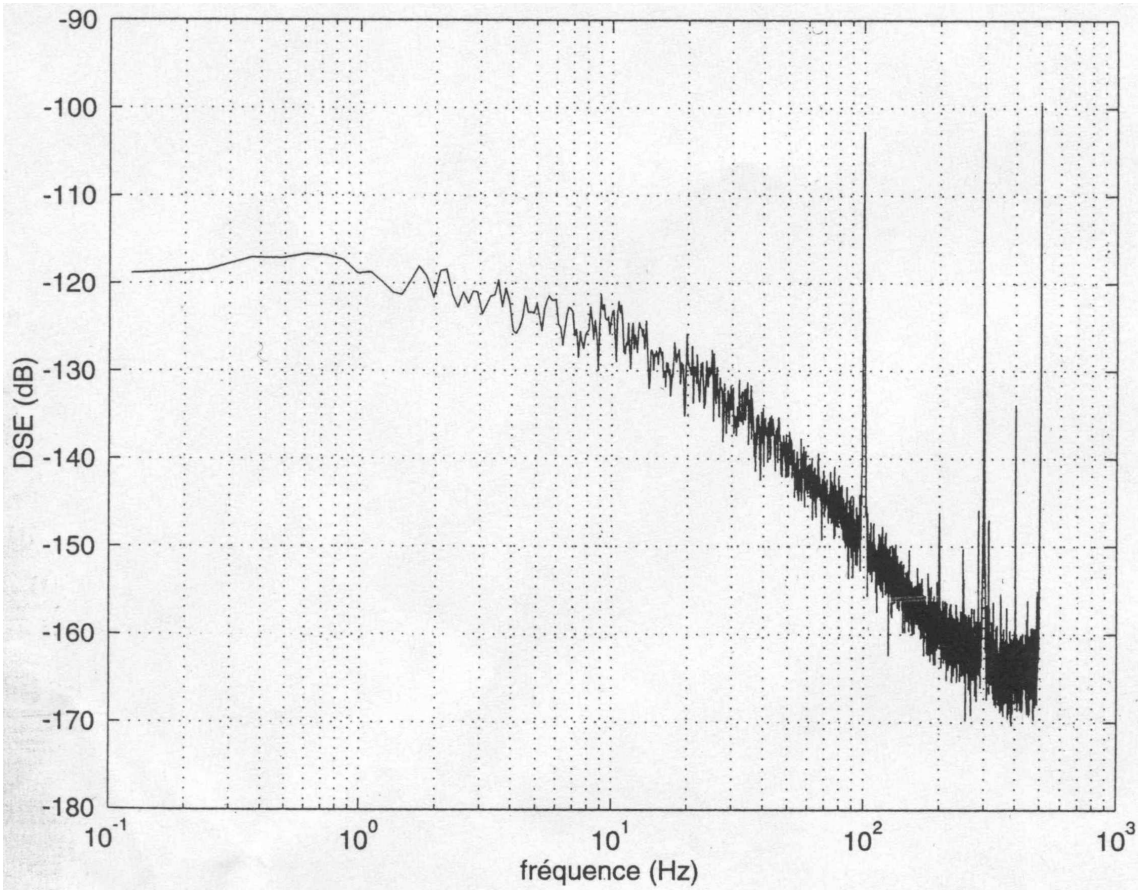


FIGURE 14.11 – Spectre FFT du signal échantillonné

Annales d'examens : Septembre 2002

Traitement du Signal

Mardi 3 septembre 2002, 16h

Session de rattrapage

Durée : 1 heure

Questions à choix multiples

Cet examen se présente sous la forme de deux questionnaires à choix multiples (QCM) :

♣ un QCM de 10 questions avec une réponse juste parmi 3 propositions
♠ un QCM de 20 questions avec une réponse juste parmi 2 propositions

Le barème est le suivant

♣ QCM à 3 propositions :
- bonne réponse : +1
- mauvaise réponse : -1/2
- pas de réponse : 0

♠ QCM à 2 propositions :
- bonne réponse : +1/2
- mauvaise réponse : -1/2
- pas de réponse : 0

Questions	Réponses
Soit $X(\nu)$ la TF (Transformée de Fourier) d'une variable aléatoire de position. La TF $Y(\nu)$ de la vitesse associée possède la propriété suivante a $\lvert Y(\nu)\rvert \propto \nu \lvert X(\nu)\rvert$ b $\lvert Y(\nu)\rvert \propto \nu^2 \lvert X(\nu)\rvert$ c $\lvert Y(\nu)\rvert \propto \nu^{-2} \lvert X(\nu)\rvert$	1 a ☐ b ☐ c ☐
La TF d'un peigne de Dirac de période T est a un peigne de Dirac de période T b une somme d'impulsions de Dirac espacées de $1/T$ c une somme de fonctions constantes car la TF de la fonction de Dirac est une constante	2 a ☐ b ☐ c ☐
La TF d'une fonction porte de largeur T est a une fonction porte de largeur 1/T b une fonction sinc de largeur 1/T c une fonction sinc de largeur infinie	3 a ☐ b ☐ c ☐
L'énergie d'un signal représenté dans le domaine temporel est a supérieure à celle calculée à partir de la représentation spectrale b inférieure à celle calculée à partir de la représentation spectrale c égale à celle calculée à partir de la représentation spectrale	4 a ☐ b ☐ c ☐

Questions	Réponses
La fonction d'autocorrélation d'un signal réel défini sur une durée finie est a paire et bornée b égale à la transformée de Fourier de ce signal réel c non définie pour $t < 0$ et croissante	5 a ☐ b ☐ c ☐
La fenêtre de pondération de Hanning permet de a s'affranchir des discontinuités lié à la troncature du signal analysé b déconvoluer la réponse de l'excitation c espacer et aérer les lignes de la FFT	6 a ☐ b ☐ c ☐
Un système est causal si a sa réponse impultionnelle est nulle pour $t < 0$ b son spectre est dans les fréquences audibles c sa Transformée de Fourier est bornée	7 a ☐ b ☐ c ☐
L'appellation "pseudo-aléatoire" relative au générateur de signaux pseudo-aléatoires signifie que a le spectre du signal est pseudo-infini b il s'agit d'un signal déterministe à caractère aléatoire c qu'il peut également délivrer des signaux déterministes	8 a ☐ b ☐ c ☐
Le rapport signal sur bruit d'un signal sinusoïdal d'amplitude A est a $SNR = \frac{A^2}{2\sigma^2}$ b $SNR = \frac{\sigma^2}{4A^2}$ c $SNR = \frac{A^2}{\sigma^2}$	9 a ☐ b ☐ c ☐
Pour mesurer un retard entre deux signaux, il vaut mieux utiliser a la transformée de Fourier discrète b la détection synchrone c la fonction d'intercorrélation	10 a ☐ b ☐ c ☐

Questions	Réponses
Le spectre d'un signal quelconque périodique est uniquement constitué de raies a vrai b faux	11 a ☐ b ☐
Si on désire avoir plus de précision sur le spectre basse fréquence d'un signal échantillonné, il faut augmenter a la fréquence d'échantillonnage b le temps d'enregistrement du signal temporel	12 a ☐ b ☐
La fréquence de Nyquist F_n est définie par $F_n = 2F_e$ où F_e est la fréquence d'échantillonnage a vrai b faux	13 a ☐ b ☐
La TF (Transformée de Fourier) d'une fonction réelle impaire est a imaginaire impaire b réelle paire	14 a ☐ b ☐
La FFT est une approximation de la Transformée de Fourier a vrai b faux	15 a ☐ b ☐
Quel est le principal défaut de la FFT a L'aliasing temporel b Le repliement de spectre	16 a ☐ b ☐
La réponse $y(t)$ d'un système de réponse impultionnelle $h(t)$ à une excitation $x(t)$ est donné par $y(t) = x(t)h(t)$ a vrai b faux	17 a ☐ b ☐
Quel est l'amplificateur que l'on ne peut construire physiquement a un amplificateur possédant un gain constant quelque soit la fréquence b un amplificateur de signaux modulés en amplitude puisque leurs spectres sont composés de diracs	18 a ☐ b ☐
Le gain complexe d'un système linéaire est la TF de sa réponse impultionnelle a vrai b faux	19 a ☐ b ☐
La fonction de répartition $F_X(x)$ définie par $F_X(x) = P(X \leq x)$ est strictement croissante a vrai b faux	20 a ☐ b ☐

Questions	Réponses
La puissance du bruit thermique du à l'agitation des électrons est nulle puisque sa valeur moyenne est nulle a vrai b faux	21 a ☐ b ☐
Un signal aléatoire stationnaire est un signal toujours constant au cours du temps a vrai b faux	22 a ☐ b ☐
La variance du signal est donné pour $\gamma(\tau = 0)$ où $\gamma(\tau)$ est la fonction d'autocorrélation du signal a vrai b faux	23 a ☐ b ☐
le théorème de Wiener-Kinchine permet de relier les propriétés spectrales et les propriétés statistiques des signaux a vrai b faux	24 a ☐ b ☐
Lorsque l'on filtre un bruit blanc, on augmente sa corrélation a vrai b faux	25 a ☐ b ☐
Soit une chaîne de deux amplificateurs identiques placés en série. Un signal de puissance 0 dBm appliqué en entrée de chaîne sort à une puissance de 12 dBm. Le gain de chaque ampli a s'exprime en dB et vaut $G = 12/2$ b s'exprime sans unité et vaut $G = \frac{10^{12/20}}{10^{2/20}}$	26 a ☐ b ☐
La transformée en ondelettes permet de visualiser ce que ne permet de visualiser la TF. Il s'agit a d'une petite impulsion superposée à une sinusoïde b d'une petite sinusoïde superposée à une autre sinusoïde	27 a ☐ b ☐
La convolution de $x(t)$ par $\delta(t - t_0)$ est equivalent à a effectuer une translation de t_0 b effectuer la dérivée en $t = t_0$	28 a ☐ b ☐
La détection synchrone est efficace lorsque a les signaux sont perturbés par du bruit basse fréquence b le système physique à étudier est non linéaire	29 a ☐ b ☐
Quelle est la note espéré à cet examen de rattrapage en répondant de façon aléatoire aux questions a 0/20 b 10/20	30 a ☐ b ☐

Avril 2003

Traitement du Signal

Jeudi 10 avril 2003, 9h

Test de contrôle de connaissances

Durée : 1 heure

Questions à choix multiples

Cet examen se présente sous la forme de deux questionnaires à choix multiples (QCM) :

♣ un QCM de 10 questions avec une réponse juste parmi 3 propositions

♠ un QCM de 20 questions avec une réponse juste parmi 2 propositions

Le barème est le suivant

♣ QCM à 3 propositions :
- bonne réponse : +1
- mauvaise réponse : -1/2
- pas de réponse : 0

♠ QCM à 2 propositions :
- bonne réponse : +1/2
- mauvaise réponse : -1/2
- pas de réponse : 0

Matériel non admis

Calculatrice, livres, polycopiés, solutions des exercices, annales.

Questions	Réponses
La convolution dans le domaine temporel de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ donne : a un filtrage du spectre $X(\nu)$ par $Y(\nu)$ b l'échantillonnage de signal $x(t)$ c une périodisation du spectre du signal $x(t)$	a ☐ b ☐ c ☐
La reconstruction d'un signal échantillonné à la fréquence f_0 se fait par a filtrage et interpolation des échantillons b filtrage et modulation par $g(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ c modulation par $g(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ et interpolation des échantillons	a ☐ b ☐ c ☐
Le signal $x(t) = \sin(100\pi t)$ possède la propriété suivante a sa fréquence est de 50 Hz b il est large bande c il est de puissance infinie	a ☐ b ☐ c ☐
La composante DC du spectre d'un signal est a la porteuse en communications radio b la TF de la composante AC c la raie de pulsation nulle	a ☐ b ☐ c ☐
Quelle est la propriété de $\delta(t)$ a $\delta(0) = 1$ b sa TF est égale à 1 c sa dérivé est égale à 1	a ☐ b ☐ c ☐
La TF (Transformée de Fourier) d'un peigne de Dirac de période T est a un peigne de Dirac de période T b une somme d'impulsions de Dirac espacées de $1/T$ c une somme de fonctions constantes car la TF de la fonction de Dirac est une constante	a ☐ b ☐ c ☐
La TF d'une fonction porte de largeur T est a une fonction porte de largeur 1/T b une fonction sinc de largeur 1/T c une fonction sinc de largeur infinie	a ☐ b ☐ c ☐

Questions	Réponses
Soit un signal sinusoïdal d'amplitude A. Quelle est la quantité qui vaut $A^2/2$? a la densité spectrale de puissance du spectre physique $S(f)$ b la puissance du signal c la densité spectrale de puissance du spectre physique **<u>et</u>** la puissance	a ☐ b ☐ c ☐
Un système est causal si a sa réponse impultionnelle est nulle pour $t < 0$ b son spectre est dans les fréquences audibles c sa Transformée de Fourier est bornée	a ☐ b ☐ c ☐
La fenêtre de pondération de Hanning permet de a s'affranchir des discontinuités lié à la troncature du signal analysé b déconvoluer la réponse de l'excitation c espacer et aérer les lignes de la FFT	a ☐ b ☐ c ☐
Comment s'écrit le signal échantillonné $x_e(t)$ du signal analogique $x(t)$ a $x_e(t) = x(t) * \sqcup\!\sqcup_T(t)$ b $x_e(t) = x(t).\sqcup\!\sqcup_T(t)$	a ☐ b ☐
Soit la fonction porte $x(t) = \Pi_\tau(t)$ de TF $X(\nu) = \tau\frac{\sin(\pi\nu\tau)}{\pi\nu\tau}$ a $\int_{-\infty}^{+\infty} \tau\frac{\sin(\pi\nu\tau)}{\pi\nu\tau}d\nu = 1$ b $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi\nu\tau)}{\pi\nu\tau}d\nu = 1$	a ☐ b ☐
Peut on extraire un message contenu dans la bande de fréquence des téléphones portables si celui-ci est échantillonné avec un PC Pentium 300 MHz. a oui b non	a ☐ b ☐

Questions	Réponses
La réponse $y(t)$ d'un système de réponse impultionnelle $h(t)$ à une excitation $x(t)$ est donné par $y(t) = x(t)h(t)$ a vrai b faux	a ☐ b ☐
Le spectre d'un signal quelconque périodique est uniquement constitué de raies a vrai b faux	a ☐ b ☐
La fréquence de Nyquist F_n est définie par $F_n = 2F_e$ où F_e est la fréquence d'échantillonnage a vrai b faux	a ☐ b ☐
La FFT est une approximation de la Transformée de Fourier a vrai b faux	a ☐ b ☐
Si on désire avoir plus de précision sur le spectre basse fréquence d'un signal échantillonné, il faut augmenter a la fréquence d'échantillonnage b le temps d'enregistrement du signal temporel	a ☐ b ☐
Quel est l'amplificateur que l'on ne peut construire physiquement a un amplificateur possédant un gain constant quelque soit la fréquence b un amplificateur de signaux modulés en amplitude puisque leurs spectres sont composés de diracs	a ☐ b ☐
Le gain complexe d'un système linéaire est la TF de sa réponse impultionnelle a vrai b faux	a ☐ b ☐
La convolution de $x(t)$ par $\delta(t - t_0)$ est équivalent à a effectuer une translation de t_0 b effectuer la dérivée en $t = t_0$	a ☐ b ☐

Questions	Réponses
Représenter un signal dans le domaine temporel consiste à dire que celui-ci est constitué d'une somme infinie de gaussiennes vérifiant la relation d'incertitude d'Heisenberg a vrai b faux	a ☐ b ☐
La TF d'un produit de convolution est le produit des TF a vrai b faux	a ☐ b ☐
Quelle est la conséquence de l'amortissement important d'un signal ? a élargissement de son spectre b suppression de composantes spectrales	a ☐ b ☐
La fonction d'autocorrélation d'un signal de durée T est de durée T a vrai b faux	a ☐ b ☐
Le calcul de la FFT du signal $x(k)$ sur N points conduit implicitement à une périodisation de $x(k)$, *i.e.* $x(k+N) = x(k)$ a vrai b faux	a ☐ b ☐
La fonction d'autocorrélation d'un signal de période T est de durée $2T$ a vrai b faux	a ☐ b ☐
Comment s'écrit une fonction périodique ? a $f(t) = f_T(t) * \sqcup\!\sqcup_T(t)$ b $f(t) = f_T(t).\sqcup\!\sqcup_T(t)$	a ☐ b ☐
Quelle est l'énergie d'un signal sinusoïdal ? a infini puisque le signal est infini b nulle puisque la puissance est constante	a ☐ b ☐
Représenter un signal dans le domaine spectral consiste à dire que celui-ci est constitué d'une somme infinie de sinusoïdes a vrai b faux	a ☐ b ☐

Juin 2003

Examen de Traitement du Signal

Jeudi 19 Juin 2003

Durée : 2 heures

Le problème devra être rédigé sur des copies séparées. Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats.

Documents autorisés : Polycopié du cours, notes **personnelles** de cours, Travaux Dirigés et Travaux Pratiques.

Documents interdits : annales et correction de cet examen

Ce sujet comporte 4 pages dont deux annexes.

Exercice 1 (2 points) : Échantillonnage de signaux à bande limitée

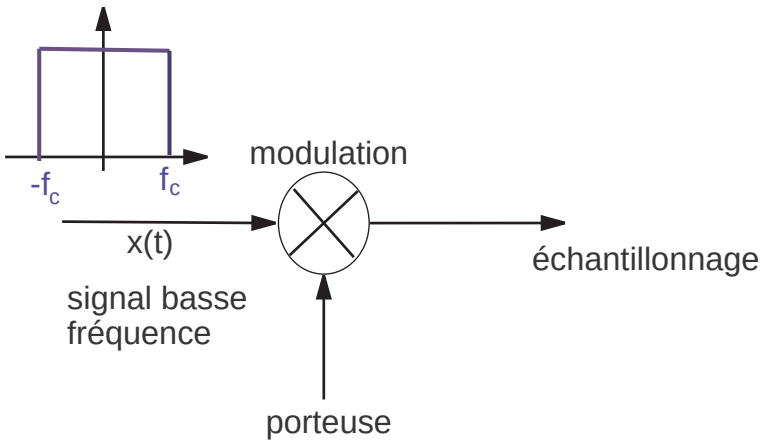


FIGURE 14.12 – Transmission de signal basse fréquence

On souhaite transmettre par modulation d'amplitude un signal basse fréquence ($f_c = 5$ kHz) à l'aide d'une porteuse et le traiter en l'échantillonnant à une fréquence de 500 kHz (Fig.14.12).

1. Déterminer la fréquence maximale de la porteuse permettant de respecter le théorème de Shannon
2. (Bonus : réponse juste : +1 point ; réponse fausse : -1 point) Ce résultat est-il valable dans le cas d'une transmission par modulation de phase ?

Exercice 2 (3 points) : Signal à phase aléatoire

On considère le signal aléatoire $x(t) = \cos(\omega t + \theta)$ où ω est une constante et θ une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0, 2\pi]$.

1. Calculer la valeur moyenne de $x(t)$
2. Calculer la fonction d'autocorrélation $\gamma_x(t, t-\tau)$
3. En déduire la variance du signal $x(t)$

Problème (15 points) : Signaux en présence d'un système non linéaire

Nous allons étudier la conséquence de la non linéarité d'un système aux 3 cas très particulier des signaux suivants :

- déterministe (avec un signal sinusoïdal)
- aléatoire (avec un signal gaussien)
- déterministe + aléatoire

Le système non linéaire (SNL) le plus simple que nous pouvons étudier est le quadrateur (Fig.14.107) pour lequel la relation entrée-sortie s'écrit

$$y(t) = Ax^2(t), \tag{14.33}$$

où A est une constante.

FIGURE 14.13 – Exemple d'un système non linéaire : le quadrateur

Cas d'une excitation sinusoïdale

On applique une entrée sinusoïdale $x(t) = a\cos(\omega_0 t)$.

1. Calculer le spectre $X(\nu)$ du signal d'entrée
2. Calculer et tracer le spectre du signal $y(t)$

3. Discuter la nature déterministe ou aléatoire du signal de sortie
4. Identifier le domaine spectral modifié par ce SNL.
5. En comparant avec le spectre du signal d'entrée, expliquer pourquoi la notion de fonction de transfert de ce SNL n'a pas de sens

Cas d'une excitation aléatoire gaussienne

Calcul du spectre Dans cette partie, on applique un bruit $b(t)$ gaussien centré.

1. Montrer que $E[y(t)] = A\frac{\sigma_b^2}{2}$
2. En utilisant les résultats liés aux bruit gaussien présentés en Annexe 1, montrer que la fonction d'autocorrélation $\gamma_y(\tau)$ de la sortie s'écrit

$$\gamma_y(\tau) = A^2\left[2\gamma_b^2(\tau) + \frac{3}{4}\sigma_b^2\right]. \tag{14.34}$$

3. En utilisant le Théorème de Wiener-Kintchine, en déduire la densité spectrale de puissance $S_y(\nu)$ du signal de sortie, exprimée en fonction de A, $S_b(\nu)$ et σ_b

Application au cas d'un bruit blanc filtré Considérons que le bruit est filtré par un passe bas de coupure f_c (même spectre que le signal $x(t)$ de la Fig.14.12).

1. Calculer la puissance totale $\mathcal{P}$ du bruit dans le domaine spectral. En déduire l'expression de $S_b(\nu)$ en fonction de σ_b et f_c.
2. Représenter graphiquement le spectre $S_y(\nu)$ en indiquant $S_y(0)$
3. Comment se modifie le spectre de ce signal aléatoire soumis à cette nonlinéarité ? Comparer avec le cas du signal sinusoïdal

Cas d'une excitation constituée d'une sinusoïde et d'un bruit gaussien

Considérons enfin une entrée du type $z(t) = x(t) + b(t)$ où $x(t)$ et $b(t)$ sont respectivement le signal déterministe et le bruit blanc filtré étudiés précédemment. Afin de déterminer le spectre du signal de sortie, nous devons exprimer la fonction d'autocorrélation $\gamma_y(\tau)$ de la sortie en fonction de moments d'ordre 4 $E[u_i u_j u_k u_l]$ où u représente $x(t)$ ou $b(t)$.

1. En utilisant les annexes, et en supposant que le bruit $b(t)$ et le signal $x(t)$ sont non corrélés, montrer que :
   - $E[2s'b's^2] = 0$,
   - $E[2sbs'^2] = 0$,
   - $E[4ss'bb'] = 2a^2\cos(2\pi f_0\tau)\gamma_b(\tau)$,
   - $E[2sbb'^2] = 0$, où $b' = b(t-\tau)$ et $s' = s(t-\tau)$.

2. Montrer alors que la fonction d'autocorrélation du signal de sortie s'écrit :

$$\gamma_y(\tau) = \frac{A^2}{4}\left[a^4\cos(4\pi f_0\tau) + 8a^2\gamma_b(\tau)\cos(2\pi f_0\tau) + 8\gamma_b^2(\tau) + \sigma_b^2\left(2a^2 + 3\sigma_b^2\right)\right]. \tag{14.35}$$

3. En appliquant Wiener-Kintchine, en déduire le spectre et en donner une représentation graphique en supposant $f_c > 2f_0$
4. Expliquer pourquoi la nonlinéarité engendre des phénomènes aléatoires lentement variables

Conclusion sur la modification spectrale à la sortie d'un SNL

1. Comparer le spectre obtenu avec la somme des spectres obtenus individuellement sur les signaux $x(t)$ et $b(t)$.
2. En déduire un résultat fondamental concernant le principe de superposition et les systèmes non linéaires.

Annexe 1 : Propriétés particulières d'un signal Gaussien

Considérons un ensemble de variables aléatoires gaussiennes de moyennes nulles ($E[x_i] = \overline{x_i} = 0$), et de covariance statistique $E[x_i x_j] = \overline{x_i x_j}$. Dans ce cas très particulier de variables gaussiennes, on a les résultats suivants :

– la moyennne du produit de trois variables gaussiennes est nulle, *i.e.*

$$\overline{x_i\, x_j\, x_k} = 0. \tag{14.36}$$

– la moyenne du produit de 4 variables s'exprime en fonction des covariances statistiques, *i.e.*

$$\overline{x_i\, x_j\, x_k\, x_l} = \overline{x_i\, x_j}\,\overline{x_k\, x_l} + \overline{x_i\, x_k}\,\overline{x_j\, x_l} + \overline{x_i\, x_l}\,\overline{x_j\, x_k}. \tag{14.37}$$

Annexe 2 : Moments de signaux sinusoïdaux

Soit deux signaux sinusoïdaux $s = a\cos(\omega_0 t)$ et $s' = a\cos(\omega_0(t-\tau))$. On a les résultats suivant (moyenne temporelle=moyenne statistique) :

$$\overline{s} = \overline{s'} = 0;\ \ \overline{s^2} = \overline{s'^2} = \frac{a^2}{2};\ \ \overline{ss'} = \frac{a^2}{2}\cos(2\omega_o\tau). \tag{14.38}$$

$$\overline{s^2 s'^2} = \frac{a^4}{4}[1 + \cos(2\omega_o\tau)]. \tag{14.39}$$

Septembre 2003

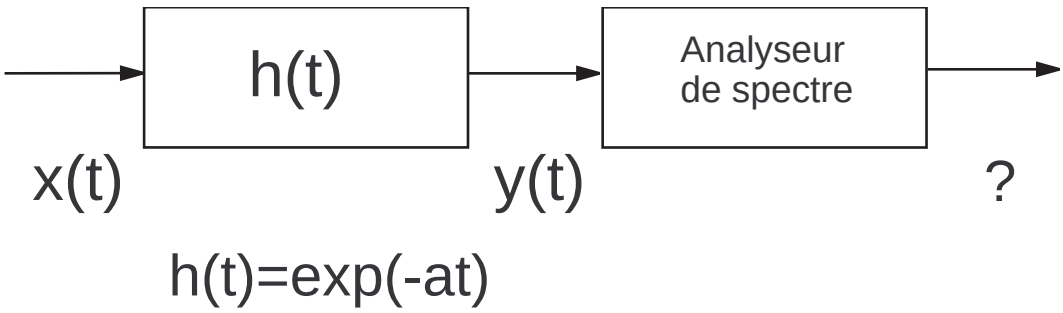
Traitement du Signal

Septembre 2003

Session de rattrapage

Durée : 20 mn sans préparation

L'analyseur de spectre



Mars 2004

Traitement du Signal

Lundi 8 Mars 2004

Test de contrôle de connaissances

Durée : 1 heure

Questions à choix multiples

Cet examen se présente sous la forme de deux questionnaires à choix multiples (QCM) :

♣ un QCM de 10 questions avec une réponse juste parmi 3 propositions
♠ un QCM de 20 questions avec une réponse juste parmi 2 propositions

Le barème est le suivant

♣ QCM à 3 propositions :
- bonne réponse : +1
- mauvaise réponse : -1/2
- pas de réponse : 0

♠ QCM à 2 propositions :
- bonne réponse : +1/2
- mauvaise réponse : -1/2
- pas de réponse : 0

Matériel non admis

Calculatrice, livres, polycopiés, solutions des exercices, annales.

Questions	Réponses		
La TFD de $x(n)$ avec $x(n) = 1$ pour n entre 6 et 13 donne a $X(5) = 0$ b $X(0) = 0$ c $X(8) = 0$	a ☐	b ☐	c ☐
Pour supprimer l'aliasing d'un signal échantillonné $x_e(t)$, il faut a prendre ce signal $x_e(t)$ et l'échantillonner en respectant le critère de Shannon b prendre ce signal $x_e(t)$ et le filtrer avec un filtre passe bas à la fréquence de Nyquist c augmenter la fréquence d'échantillonnage	a ☐	b ☐	c ☐
La TF d'une fonction porte de largeur T est a une fonction porte de largeur 1/T b une fonction sinc de largeur 1/T c une fonction sinc de largeur infinie	a ☐	b ☐	c ☐
Un signal impair, réel et de période $T = 1$ peut être décomposé dans la base suivante a $\{\sin(2\pi kt)\}$ avec $k \in \mathbb{Z}_+$ b $\{\cos(kt)\}$ avec $k \in \mathbb{R}$ c $\{\exp(2\pi kT)\}$ avec $k \in \mathbb{R}$	a ☐	b ☐	c ☐
Soit un signal sinusoïdal d'amplitude A. Quelle est la quantité qui vaut $A^2/2$? a la densité spectrale de puissance du spectre physique $S(f)$ b la puissance du signal c la densité spectrale de puissance du spectre physique **<u>et</u>** la puissance	a ☐	b ☐	c ☐
La TF (Transformée de Fourier) d'un peigne de Dirac de période T est a un peigne de Dirac de période T b une somme d'impulsions de Dirac espacées de $1/T$ c une somme de fonctions constantes car la TF de la fonction de Dirac est une constante	a ☐	b ☐	c ☐
Soit un signal à énergie infinie et à puissance finie. Il possède une fonction d'autocorrélation qui tend vers 0 en l'infini. Il possède la propriété suivante a c'est un signal sinusoïdal déterministe b c'est un signal aléatoire périodique c c'est un bruit	a ☐	b ☐	c ☐

Questions	Réponses
L'énergie d'un signal représenté dans le domaine temporel est a supérieure à celle calculée à partir de la représentation spectrale b inférieure à celle calculée à partir de la représentation spectrale c égale à celle calculée à partir de la représentation spectrale	a b c ☐ ☐ ☐
La convolution dans le domaine temporel de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ donne : a un filtrage du spectre $X(\nu)$ par $Y(\nu)$ b l'échantillonnage de signal $x(t)$ c une périodisation du spectre du signal $x(t)$	a b c ☐ ☐ ☐
Le fait de tronquer une sinusoïde engendre a une augmentation de sa puissance b une augmentation de son contenu spectral c une augmentation de la covariance statistique	a b c ☐ ☐ ☐
Comment s'écrit le signal échantillonné $x_e(t)$ du signal analogique $x(t)$ a $x_e(t) = x(t) * \sqcup\!\!\sqcup_T(t)$ b $x_e(t) = x(t).\sqcup\!\!\sqcup_T(t)$	a b ☐ ☐
Le spectre d'un signal quelconque périodique est uniquement constitué de raies a vrai b faux	a b ☐ ☐
La réponse $y(t)$ d'un système de réponse impultionnelle $h(t)$ à une excitation $x(t)$ est donné par $y(t) = x(t)h(t)$ a vrai b faux	a b ☐ ☐
Le spectre d'un signal quelconque périodique est uniquement constitué de raies a vrai b faux	a b ☐ ☐
La fréquence de Nyquist F_n est définie par $F_n = 2F_e$ où F_e est la fréquence d'échantillonnage a vrai b faux	a b ☐ ☐

Questions	Réponses	
On utilise des filtres sélectifs passe-bande pour augmenter la rapidité d'un système en fonctionnement. a vrai b faux	a ☐	b ☐
Soit $x(t)$ un signal aléatoire réel. Sa variance s'écrit $\sigma^2(t) = \int (x(t) - E[x(t)])^2 dt$ a vrai b faux	a ☐	b ☐
La fonction d'autocorrélation d'un signal réel s'écrit $\gamma(\tau) = \int x(t)x(\tau - t)dt$ a vrai b faux	a ☐	b ☐
Si on désire avoir plus de précision sur le spectre basse fréquence d'un signal échantillonné, il faut augmenter a la fréquence d'échantillonnage b le temps d'enregistrement du signal temporel	a ☐	b ☐
La fonction de répartition $F_X(x)$ définie par $F_X(x) = P(X \leq x)$ est strictement croissante a vrai b faux	a ☐	b ☐
La réponse impultionnelle d'un système linéaire est la TF de son gain complexe a vrai b faux	a ☐	b ☐
La convolution de $x(t)$ par $\delta(t - t_0)$ est équivalent à a effectuer une translation de t_0 b effectuer la dérivée en $t = t_0$	a ☐	b ☐
Quelle est le type de stationnarité qui est le plus souvent étudiée ? a 1er ordre b 2eme ordre	a ☐	b ☐
La TF (Transformée de Fourier) d'une fonction réelle impaire est a imaginaire impaire b réelle paire	a ☐	b ☐

Questions	Réponses	
Comment s'écrit le spectre $X_e(\nu)$ d'un signal ayant pour spectre $X(\nu)$ a $X_e(\nu) = X(\nu) * \sqcup\!\!\sqcup_{\nu_0}(\nu)$ b $X_e(\nu) = x(\nu).\sqcup\!\!\sqcup_{\nu_0}(\nu)$	a ☐	b ☐
L'effet palissade n'apparaît que lorsque il y a repliement de spectre a vrai b faux	a ☐	b ☐
Un signal aléatoire stationnaire est un signal toujours constant au cours du temps a vrai b faux	a ☐	b ☐
La variance du signal est donné pour $\gamma(\tau = 0)$ où $\gamma(\tau)$ est la fonction d'autocorrélation du signal a vrai b faux	a ☐	b ☐
Comment s'écrit une fonction périodique ? a $f(t) = f_T(t) * \sqcup\!\!\sqcup_{T}(t)$ b $f(t) = f_T(t).\sqcup\!\!\sqcup_{T}(t)$	a ☐	b ☐
Représenter un signal dans le domaine spectral consiste à dire que celui-ci est constitué d'une somme infinie de sinusoïdes a vrai b faux	a ☐	b ☐

Mai 2004

Université François Rabelais

École d'Ingénieurs du Val de Loire

Examen de Traitement du Signal

Mardi 18 Mai 2004
Durée : 2 heures

Le problème devra être rédigé sur des copies séparées. Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques.

Documents autorisés : Polycopié du cours, notes **personnelles** de cours, Travaux Dirigés et Travaux Pratiques.

Documents interdits : annales et correction de cet examen

Ce sujet comporte 4 pages.

Problème (14 points) : Analyseur de spectres avec corrélateur

Une des méthodes couramment utilisées en analyse spectrale consiste d'abord à mesurer la fonction d'autocorrélation du signal à analyser ; et ensuite, l'évaluation de la densité spectrale de puissance (DSP) est réalisée selon la méthode étudiée lors des séances de Travaux Pratiques. On suppose que le signal à analyser est déterministe et s'écrit $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$.

1. Expliquer et argumenter l'intérêt d'évaluer la fonction d'autocorrélation du signal à analyser, avant même de déterminer sa DSP.
2. Calculer la fonction d'autocorrélation $\gamma_x(\tau)$du signal $x(t)$ et sa DSP (dans l'ordre qu'il vous convient). Peut-on utiliser le Théorème de Wiener-Kintchine pour passer de l'une à l'autre ? En déduire la puissance du signal.

Pour mesurer $\gamma_x(\tau)$, la méthode la plus simple consiste à acquérir le signal sur une durée T. On calcule ensuite la fonction d'autocorrélation $\gamma_{x_T}(\tau)$ de ce signal $x_T(t) = x(t)\Pi_T(t - T/2)$. L'évaluation (ou l'estimation) de $\gamma_x(\tau)$ sera alors donnée par $\widehat{\gamma_x}(\tau) = \frac{1}{T}\gamma_{x_T}(\tau)$.

3. Calculer $\widehat{\gamma_x}(\tau)$ pour $\tau > 0$. Montrer que le résultat contient un terme qui tend vers $\gamma_x(\tau)$ lorsque $T \to \infty$, et un second terme qui s'annule lorsque $T \to \infty$. Représenter graphiquement ces deux termes pour $\tau > 0$ et $\tau < 0$.
4. Calculer la durée T_1 nécessaire pour que l'amplitude maximale du second terme soit inférieure à $\epsilon\gamma_x(0)$. Application numérique : $\epsilon = 0.01$, $f_0 = 1$MHz.
5. On suppose le deuxième terme négligeable. Calculer la Transformée de Fourier (TF) de la fonction $(1 - |\tau|/T)\Pi_{2T}(\tau)$. En déduire que la DSP $\widehat{S_x}(\nu)$ du signal mesuré $x_T(t)$ est égale à la TF de la fonction $\widehat{\gamma_x}(\tau)$.
6. Après avoir représenté graphiquement $\widehat{S_x}(\nu)$ et $S_x(\nu)$, discuter leurs différences. Si l'on souhaite mesurer la puissance $\widehat{\mathcal{P}}_x$ du signal en intégrant $\widehat{S_x}(\nu)$, quel résultat obtient-on ?

On souhaite étudier l'influence de la durée de mesure sur la résolution spectrale, c'est-à-dire la capacité de l'analyseur à différentier deux raies proches. Le signal à analyser s'écrit :

$$y(t) = A[\cos(2\pi f_a t) + \cos(2\pi f_b t + \phi_0)], \tag{14.40}$$

où $f_a = f_0 - \frac{\Delta f}{2}$ et $f_b = f_0 + \frac{\Delta f}{2}$ avec $\Delta f << f_0$.

7. Représentez l'allure de $\widehat{S_y}(\nu)$ du signal mesuré. De quels paramètres dépend le pouvoir de résolution spectrale ?
8. Montrer que la puissance moyenne $\widehat{\mathcal{P}}_y$ du signal mesuré sur la durée T s'écrit :

$$\widehat{\mathcal{P}}_y = A^2 + \frac{1}{T}\int_0^T A^2[2\cos(2\pi f_a t)\cos(2\pi f_b t + \phi_0)]dt. \tag{14.41}$$

Interpréter ce résultat. Montrer que la durée T_2 de mesure nécessaire pour que l'amplitude du deuxième terme soit inférieure ($\forall\phi_0$) à $\epsilon\gamma_y(0)$ est donné par

$$T_2 > \frac{1}{\epsilon\pi\Delta f}. \tag{14.42}$$

10. Interpréter et comparer ce résultat avec celui obtenu en 5. Justifier le lien existant entre Δf et T_2. Ennoncer le principe fondamental justifiant ce résultat.

Rappel :

$2\cos a \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b)$

$2\cos a \sin b = \sin(a + b) - \sin(a - b)$

Exercice 1 (6 points) : Analyse spectrale avec le DSP TMS320C50

Les figures 14.14, 14.15 et 14.16 correspondent à une copie d'écran du spectre d'un signal évalué à partir du programme FFT.exe proposé dans le starter kit du DSP. Le signal appliqué est triangulaire ou carré de fréquence $f_0 < 2400$ Hz généré par le HP54645A. Afin de pouvoir évaluer cette fréquence, on a effectué 3 mesures :

- ♠ dans les conditions normales (Fig.14.14)
- ♡ en changeant la fréquence du signal : $f_0 + 4500$ Hz (Fig.14.15)
- ♢ en changeant la fréquence du signal : $f_0 + 10500$ Hz (Fig.14.16)

1. Interprétation générale
   a. Que pensez-vous de l'unité (dB) en amplitude ? Corriger, en justifiant, par une unité plus appropriée pour ce type de mesure.
   b. Quelle information apporte la fréquence maximale $f_m = 4750$ Hz ?
   c. Évaluer le pas Δf séparant deux lignes FFT. En déduire le nombre de points $N = 2^n$ du signal numérique sur lequel le spectre a été calculé.
2. Commenter le spectre de la figure 14.14 et proposer une explication à l'origine des harmoniques pairs.
3. Commenter le spectre de la figure 14.15 et proposer une réponse quant à la forme du signal (triangle ou carré)
4. Commenter le spectre de la figure 14.16 et expliquer le phénomène observé (présence de 2 raies seulement ! ! !)
5. Conclure sur la valeur de f_0 et la forme du signal

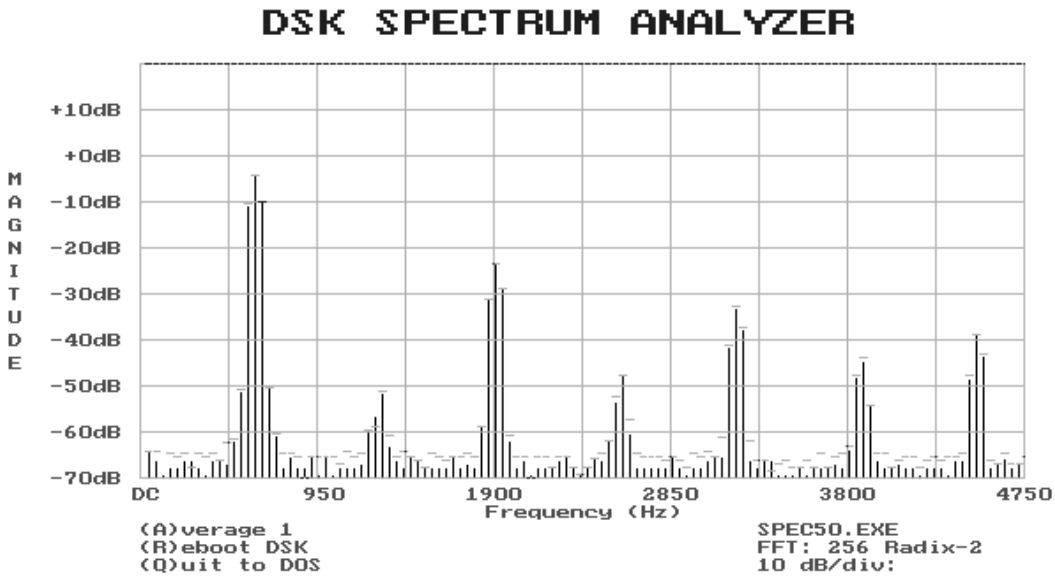


FIGURE 14.14 – Spectre du signal initial à la fréquence f_0

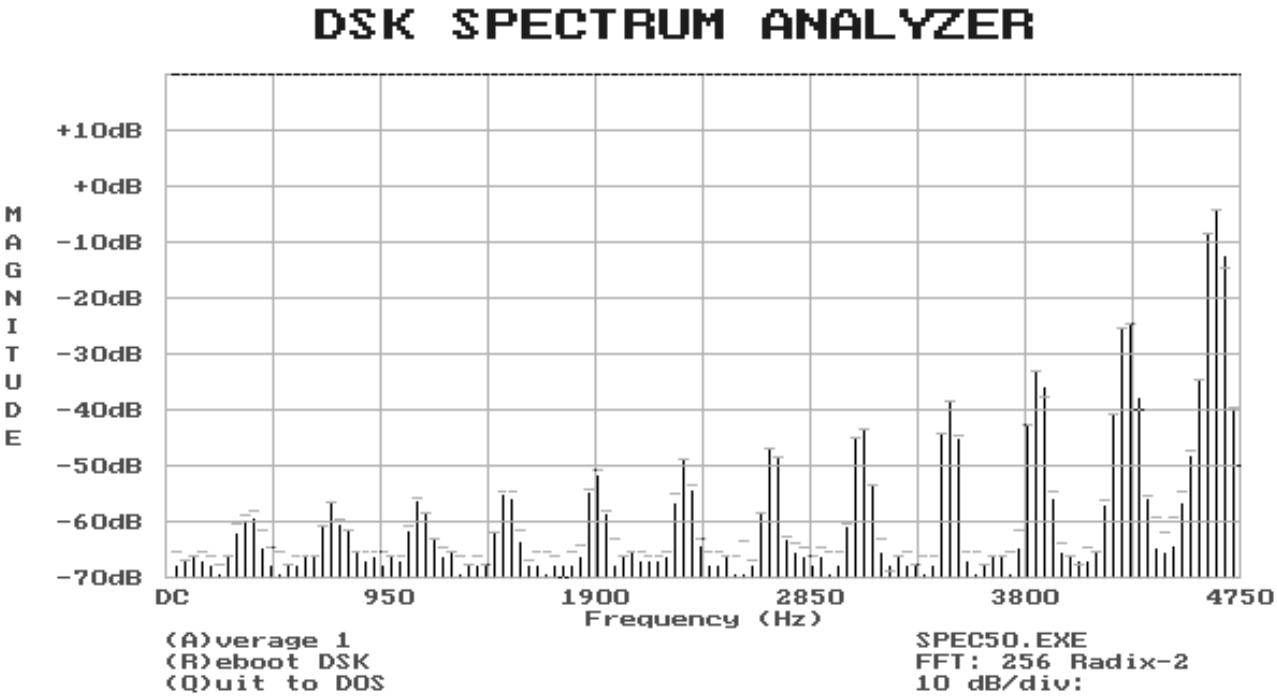


FIGURE 14.15 – Spectre du signal initial mais dont la fréquence est $f_0 + 4500$ Hz

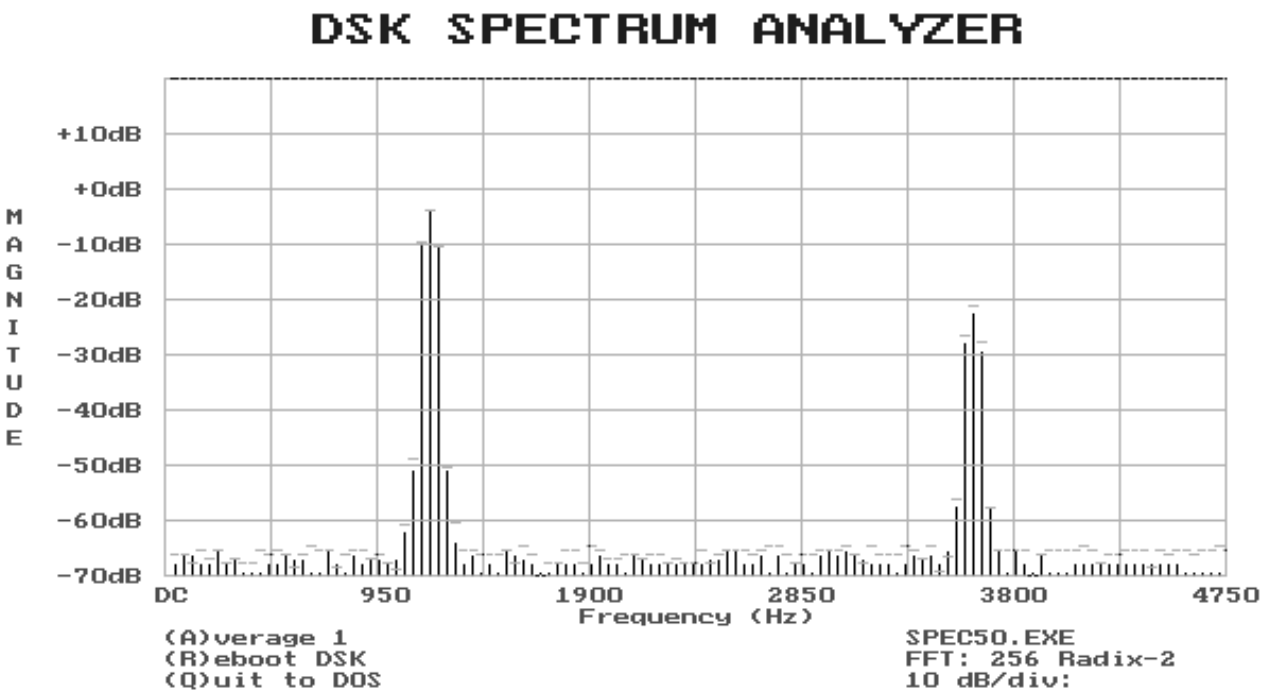


FIGURE 14.16 – Spectre du signal initial mais dont la fréquence est $f_0 + 10500$ Hz

Septembre 2004

Traitement du Signal

Septembre 2004

Session de rattrapage

Durée : 15 mn sans préparation

Sujet 1

a. Calculer le rapport signal sur bruit d'un signal donné par

$$x(t) = 2A\cos(2\omega_0 t) + b(t), \tag{14.43}$$

avec $E[b^2(t)] = \sigma^2$.

b. Dessiner l'allure d'un signal dont le SNR est de 6dB
   - dans le domaine spectral
   - dans le domaine temporel

Sujet 2

a. Décrire les notions de réponse impultionnelle et de gain complexe
b. Application : ligne à retard idéale

Mai 2005

Université François Rabelais

École d'Ingénieurs du Val de Loire

Examen de Traitement du Signal

Lundi 30 mai 2005
Durée : 2 heures

Le problème devra être rédigé sur des copies séparées. Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques.

Documents autorisés : Feuille A4 recto verso avec notes personnelles, formules et résultats (photocopies formellement interdites)

Documents interdits : annales et correction de cet examen

Ce sujet comporte 4 pages.

Problème (10 points) : Analyseur de spectres avec corrélateur

Un système physique, soumis à une excitation impultionnelle, délivre un signal de "relaxation" $s(t)$ qui décrit le retour du système vers son état d'équilibre. L'estimation de $s(t)$ permet de connaître quelques paramètres caractéristiques du système physique.

Dans cette étude, on suppose que la réponse du système à une excitation impultionnelle est de la forme

$$s(t) = Ae^{-\alpha(t-t_0)}H(t-t_0), \tag{14.44}$$

où $H(t)$ est la fonction d'Heaviside ($H(t) = 0$ si $t < 0$, $H(t) = 1$ si $t > 0$), A est l'amplitude du signal, $1/\alpha$ le temps de relaxation du système et t_0 l'instant d'apparition de l'excitation (constantes caractéristiques du système physique).

Pour pouvoir caractériser ce système, on utilise un montage corrélateur (Fig.14.86), dans lequel le générateur délivre un signal de la forme $y(t) = \sqrt{2\beta}e^{-\beta t}H(t)$ avec $\beta > 0$ un paramètre ajustable à volonté.

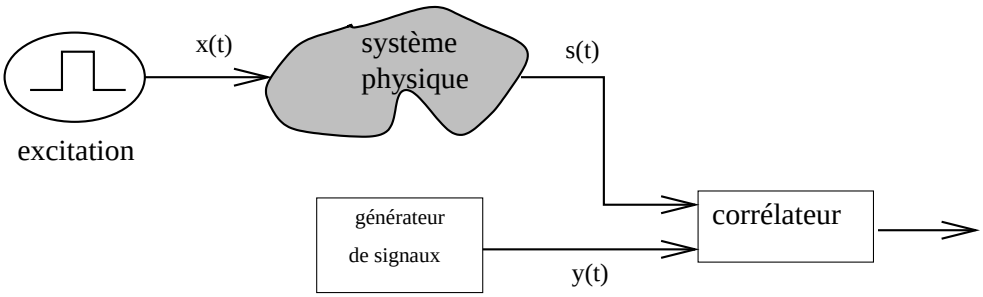


FIGURE 14.17 – Identification d'un système physique par corrélation : dispositif expérimental

1. Calculer l'énergie du signal $y(t)$
2. Le corrélateur permet le calcul de la fonction d'intercorrélation $\Gamma_{ys}(\tau)$ des deux signaux $y(t)$ et $s(t)$ définie par :

$$\Gamma_{ys}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)s(t+\tau)dt. \tag{14.45}$$

   Exprimer $\Gamma_{ys}(\tau)$ en fonction de $\alpha, \beta, A, t_0, \tau$. Montrer qu'elle est maximale pour $\tau = t_0$.
3. Étudier l'évolution de $\Gamma(\tau = t_0)$ en fonction de β. En déduire une méthode qui permettrait de déterminer expérimentalement les constantes A et α.
4. On voudrait réaliser l'opération de convolution par un filtrage linéaire. Quel doit être la réponse impultionnelle du filtre afin que son signal de sortie corresponde bien à $\Gamma_{ys}(\tau)$. Un tel filtre est-il réalisable physiquement. Justifier vos réponses.

Exercice 1 (5 points) : Échantillonnage numérique 1D

Soit $X(f)$ le spectre (Transformée de Fourier) représenté en Fig.14.30a d'un signal audio continu $x(t)$.

1. On décide de numériser ce signal $x(t)$ à une fréquence $Fe = 22$ kHz. Donner l'expression du signal échantillonné $x_{Te}(t)$, en fonction de $x(t)$ et du peigne de Dirac.
2. Tracer le spectre $X_{Fe}(f)$ du signal échantillonné $x_{Te}(t)$ dans l'intervalle [-37 ;37] kHz.
3. Que se passe-t-il dans l'intervalle [7 ;15] ?
4. Soit un système physique caractérisé par la fonction $H(f)$ comme illustré en Fig.14.30b. Comment appelle-t-on la fonction $H(f)$?
5. Tracer le spectre de la fonction $Y(f)$ donné en sortie du système représenté en Fig.14.30c.
6. Tracer le spectre $Y_{Fe}(f)$ du signal échantillonné $y_{Te}(t)$dans l'intervalle [-37 ;37] kHz.
7. En déduire, en le justifiant, si se sont les graves ou les aigus qui sont affectés lorsque l'on choisi un codage MP3 à 22 kHz plutôt qu'a 44 kHz.

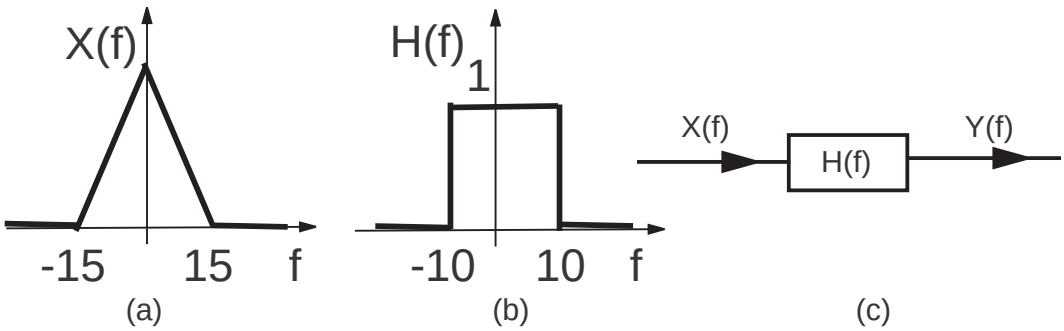


FIGURE 14.18 – Propriétés

Exercice 2 (5 points) : Échantillonnage numérique 2D

L'étude, l'analyse et le traitement des images numériques sont réalisées en considérant l'image comme un signal 2D.

1. Proposer une explication, liée à l'échantillonnage 2D de l'image numérique, quant à la présence des bandes foncées sur le toit de la maison photographiée (Fig.14.74)
2. On donne :
   - longueur du toit : $L = 10.1$ m
   - Nombre de pixel sur une longueur du toit : $N = 256$

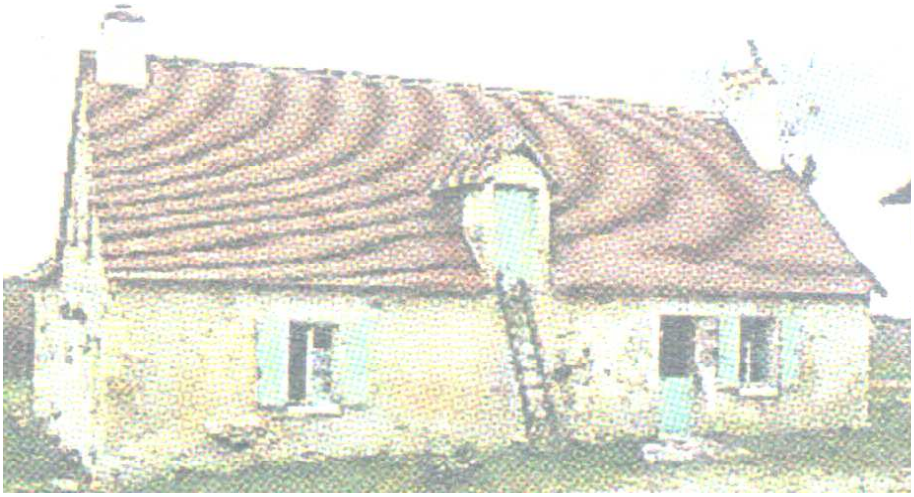


FIGURE 14.19 – Photographie d'une maison en vente dans un journal d'annonces. On peut observer des bandes sur le toit liées à l'échantillonnage spatial de l'image (résolution en pixels)

– largeur approximative des tuiles : $l \simeq 20$ cm

En utilisant l'effet décrit ci-dessus, donner une valeur plus précise de la largeur $\widetilde{l}$ des tuiles du toit

Septembre 2005

École d'Ingénieurs du Val de Loire - Université François Rabelais

Traitement du Signal : session de rattrapage

Jeudi 1 septembre 2005
Durée : 1 heure

Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques. Aucun documents autorisés, calculatrices et téléphones cellulaires interdits

Exercice 1 : Calculer et représenter graphiquement le produit de convolution des deux fonctions présentées en Fig.14.103

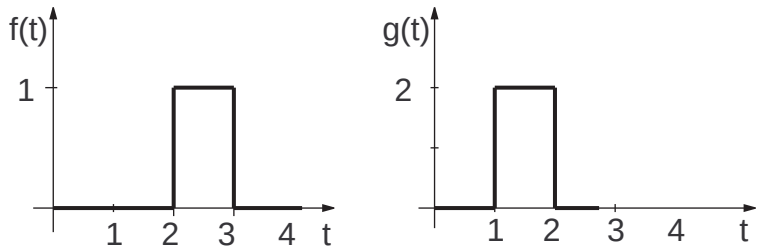


FIGURE 14.20 – Fonctions portes

Exercice 2 : Tracer, pour les bruits blancs gaussien et uniforme, les fonctions suivantes : densité spectrale de puissance, fonction d'autocorrélation, densité de probabilité

Exercice 3 : Soit un bruit blanc gaussien filtré ($f_{max} = 1MHz$) et de variance 4 $(mV)^2$. On veut réduire la puissance de ce bruit avec un filtre passe bas. Quelle doit être la fréquence de coupure de ce filtre pour avoir une variance de 2 $(mV)^2$

Exercice 4 : Soit un signal sinusoïdal de 1 MHz échantillonné à 600 kHz. On effectue la FFT de ce signal sur 2000 points avec un oscilloscope numérique. Reproduisez l'affichage de cette FFT.

Juin 2006

Université François Rabelais

École d'Ingénieurs du Val de Loire

Examen de Traitement du Signal

Lundi 26 juin 2006
Durée : 2 heures

Le problème devra être rédigé sur des copies séparées. Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques.

Documents autorisés : Feuille A4 recto verso avec notes personnelles, formules et résultats (photocopies formellement interdites)

Documents interdits : annales et correction de cet examen

Ce sujet comporte 3 pages.

Problème (10 points) : Filtrage du bruit pas moyennage

Soit le système décrit par la figure Fig.14.60. permettant d'analyser un signal $s(t)$. Le bruit $n(t)$ est supposé stationnaire, ergodique et non corrélé avec le signal $s(t)$. La réponse temporelle du filtre est notée $f(t)$.

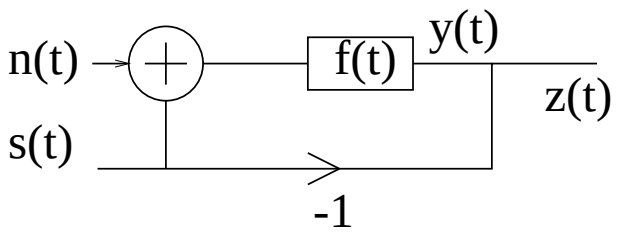


FIGURE 14.21 – Principe schématique du filtrage du signal $s(t)$

1. Calculer la fonction de corrélation $\gamma_z(\tau)$ en fonction des corrélations $\gamma_s(\tau)$, $\gamma_y(\tau)$, $\gamma_{ys}(\tau)$ et $\gamma_{sy}(\tau)$
2. Exprimer $y(t)$ en fonction de $f(t)$, $n(t)$ et $s(t)$.
3. Exprimer la fonction de corrélation $\gamma_y(\tau)$ sous la forme d'un produit de convolution
4. Expliquer pourquoi on peut appliquer le théorème de Wiener-Kinchine au signal $y(t)$. Montrer que

$$S_y(\nu) = \left|F(\nu)\right|^2 (S_n(\nu) + S_s(\nu)) \tag{14.46}$$

$$S_{sy}(\nu) = F^*(\nu) S_s(\nu) \tag{14.47}$$

$$S_{ys}(\nu) = F(\nu) S_s(\nu) \tag{14.48}$$

5. En déduire que

$$S_z(\nu) = \left|F(\nu)\right|^2 S_n(\nu) + \left|F(\nu) - 1\right|^2 S_s(\nu). \tag{14.49}$$

6. Interpreter ce résultat lorsque $\nu \to 0$ dans le cas ou $F(\nu)$ est la réponse fréquentielle d'un filtre moyenneur

Exercice 1 (5 points) : Analyse spectrale numérique

L'acquisition numérique d'un signal issu d'un capteur de pression présente un spectre FFT donné par la figure Fig.14.22. La partie intéressante de ce signal correspond à des fluctuations lentes comprises dans la bande [0.5 Hz, 20 Hz].

1. Déterminer la fréquence d'échantillonnage du signal
2. Identifier les sources de perturbation du capteur

3. On désire avoir un spectre FFT plus précis en fréquence. Est-il possible d'utiliser les données numériques de ce signal en échantillonnant à 60 Hz. Justifier suffisamment votre réponse

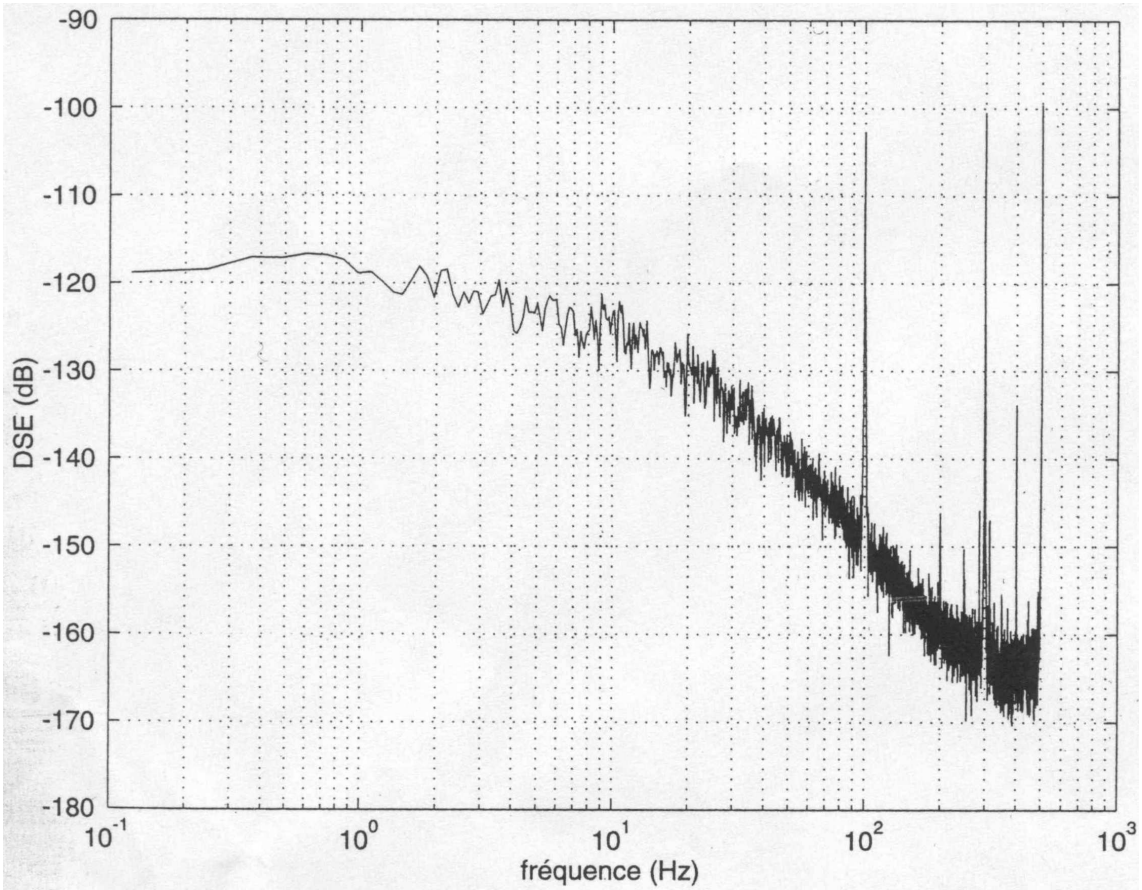


FIGURE 14.22 – Spectre FFT du signal échantillonné

Exercice 2 (5 points) : Signal à phase aléatoire

On considère le signal aléatoire $x(t) = \cos(\omega t + \theta)$ où ω est une constante et θ une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0, 2\pi]$.

1. Calculer la valeur moyenne de $x(t)$
2. Calculer la fonction d'autocorrélation $\gamma_x(t, t-\tau)$
3. En déduire la variance du signal $x(t)$

Septembre 2006

Traitement du Signal

Septembre 2006

Session de rattrapage

Durée : 10 mn avec 10 mn de préparation

Sujet 1

Soit le spectre réel d'un signal $x(t)$ donné par la figure Fig.14.23.

– Calculer la valeur $x(t = 0)$ et la puissance du signal

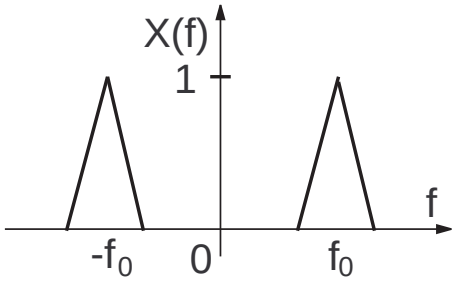


FIGURE 14.23 – *Spectre réel du signal $x(t)$*

Janvier 2007

École Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire

Examen de Traitement du Signal

Jeudi 25 janvier 2007
Durée : 2 heures

Les exercices devront être rédigés sur des copies séparées. Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques.

Documents autorisés : Feuille A4 recto verso avec notes personnelles, formules et résultats (photocopies formellement interdites)

Documents interdits : annales et correction de cet examen

Ce sujet comporte 4 pages dont 2 annexes.

Exercice 1 : Filtrage de signal aléatoire gaussien (10 points)

Soit un signal aléatoire gaussien centré $x(t)$ dont la densité spectrale unilatérale $S_x(f)$ est donnée par la figure Fig.14.24(a). Cette densité spectrale a été évaluée sur une durée $T = 1$ s, le signal ayant été échantillonné avec un DSP à la fréquence de $f_e = 20$ kHz. Un filtre "anti-repliement" a également été utilisé dans l'acquisition. Ce filtre permet de vérifier le critère de Shannon.

1. Calculer les deux fréquences de coupure f_1 et f_3 du spectre $S_x(f)$ du signal $x(t)$.
2. Déterminer la fréquence de coupure f_2 appelée "corner frequency" sachant que la densité spectrale de puissance $S_x(f)$ suit une loi en $1/f$: $S_x(f) \sim 1/f$.
3. Calculer la puissance totale du signal (en V^2). En déduire la probabilité pour que $x(t) >$ 40nV

4. On divise par 2 la fréquence d'échantillonnage (et également la fréquence de coupure du filtre anti-repliement). Calculer la puissance totale du signal (en V^2). En déduire la probabilité pour que $x(t) > 40$nV

Exercice 2 : Convolution de signaux (10 points)

Soit les deux fonctions réelles du temps $f(t)$ et $g(t)$ dont on veut déterminer la convolution $y(t) = f(t) * g(t)$ (Fig.14.24(b)).

1. Déterminer intervalle de temps sur lequel la valeur de $y(t)$ est non nulle
2. Déterminer le ou les instant(s) où $y(t)$ atteint son maximum
3. Calculer $y(t)$ et donner son l'allure graphique

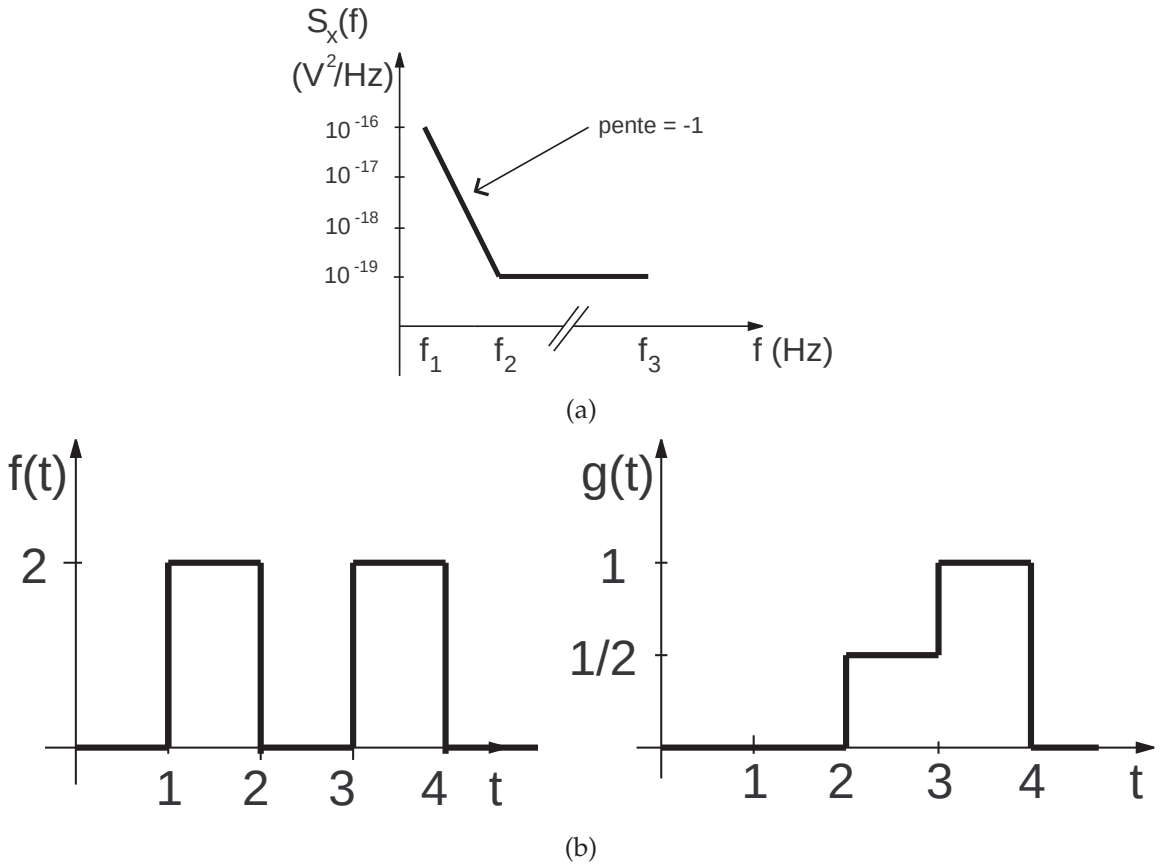


FIGURE 14.24 – (a) Densité Spectrale unilatérale $S_x(f)$ du signal aléatoire $x(t)$. (b) représentation des signaux $f(t)$ et $g(t)$

Septembre 2007

Traitement du Signal

Septembre 2007

Session de rattrapage

Durée : 10 mn avec 10 mn de préparation

Sujet 1

Propriétés spectrales et temporelles du bruit blanc gaussien

1. Représenter graphiquement les différentes propriétés du bruit blanc gaussien
   - densité spectrale de puissance
   - fonction d'autocorrélation
   - distribution statistique
   - représentation temporelle
2. Donner la correspondance entre ces courbes

Janvier 2008

École Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire

Examen de Traitement du Signal (4ème année)

Jeudi 24 janvier 2008
Durée : 2 heures

Les exercices devront être rédigés sur des copies séparées. Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques.

Documents autorisés : Feuille A4 recto verso avec notes personnelles, formules et résultats (photocopies formellement interdites)

Documents interdits : annales et correction de cet examen

Ce sujet comporte 5 pages.

Exercice 1 (6 points) : Échantillonnage numérique 1D

Soit $X(f)$ le spectre (Transformée de Fourier) représenté en Fig.14.30(a) d'un signal audio continu $x(t)$.

1. On décide de numériser ce signal $x(t)$ à une fréquence $Fe = 22$ kHz. Donner l'expression du signal échantillonné $x_{Te}(t)$, en fonction de $x(t)$ et du peigne de Dirac.
2. Tracer le spectre $X_{Fe}(f)$ du signal échantillonné $x_{Te}(t)$ dans l'intervalle [-37 ;37] kHz.
3. Que se passe-t-il dans l'intervalle [7 ;15] ?
4. Soit un système physique $(\mathcal{S})$ caractérisé par la fonction $H(f)$ comme illustré en Fig.14.30b. Comment appelle-t-on la fonction $H(f)$?
5. Tracer le spectre de la fonction $Y(f)$ donné en sortie du système $\mathcal{S}$ représenté en Fig.14.30c.
6. Tracer le spectre $Y_{Fe}(f)$ du signal échantillonné $y_{Te}(t)$dans l'intervalle [-37 ;37] kHz.

7. En déduire, en le justifiant, si se sont les graves ou les aigus qui sont affectés lorsque l'on choisi un codage MP3 à 22 kHz plutôt qu'a 44 kHz.

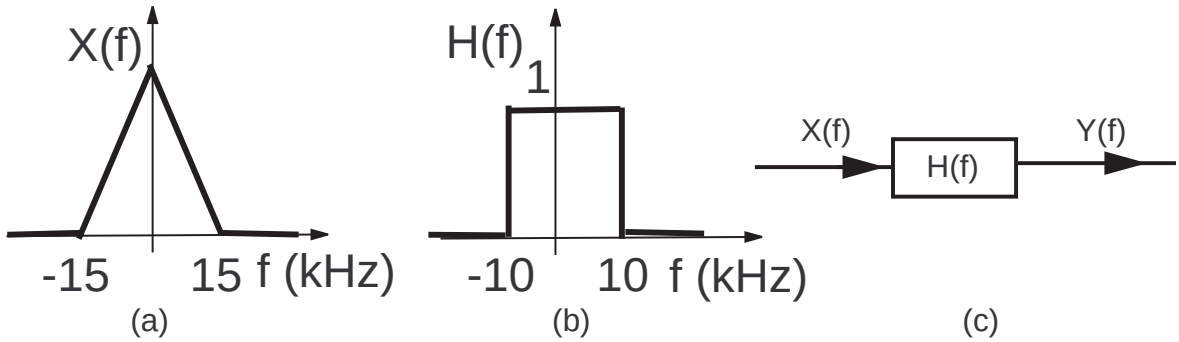


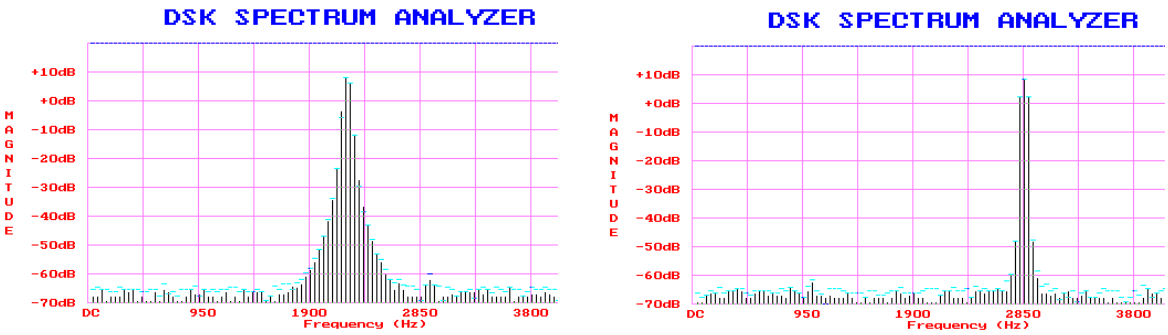
FIGURE 14.25 – (a) :Spectre du signal audio . (b-c) : Caractéristiques fréquentielles du système $\mathcal{S}$

Exercice 2 (6 points) : Analyse FFT avec le DSP TMS320C50

Les figures suivantes ont été extraites par copie d'écran **partielle** d'une FFT réalisée à partir d'un DSP TMS320C50. Les figures présentent donc un span de 3.800 kHz qui n'est qu'une partie du span total de la FFT.

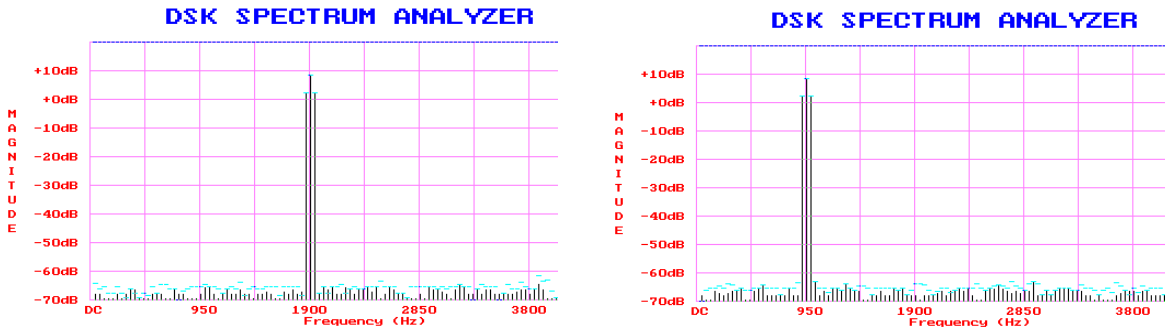
1. Quelle est la fréquence maximale théorique que l'on peut obtenir à partir d'une FFT échantillonnée à F_e ? Que se passe-t-il si on mesure un signal sinusoïdal de fréquence $f_0 = 3F_e$?
2. En déduire que la fréquence d'échantillonnage du DSP est supérieure à 7.6 kHz
3. Le spectre FFT de la figure Fig.(14.26a) est celui d'un signal sinusoïdal, calculée en respectant le critère de Shannon. Évaluer la fréquence du signal et rappeler le défaut de la FFT qui provoque cet élargissement de spectre. Combien de raies devrait-on avoir à l'écran ?
4. Le spectre de la figure Fig.(14.26b) est celui d'un signal sinusoïdal de fréquence $f_0 =$ 6.976kHz. Interpreter la figure, les raies latérales et la condition entre f_e et f_0 pour que ce défaut soit diminué. Proposer une première valeur de la fréquence d'échantillonnage f_e du DSP.
5. Un signal sinusoïdal de fréquence $f_0 =$ 11897.3Hz a été analysé et le spectre FFT est donné en figure Fig.(14.27a). La condition entre f_e et f_0 est choisie de telle sorte que le défaut décrit précédemment soit absent. Proposer une deuxième valeur (plus précise) de la fréquence d'échantillonnage du DSP

6. Sachant que le spectre FFT de la figure Fig.(14.27b) a été effectué pour un signal sinusoïdal à $f_0 = 90295.5$Hz, interpreter le spectre FFT et donner une troisième valeur (encore plus précise) de la fréquence d'échantillonnage du DSP
7. Sachant que l'incertitude de mesure du spectre FFT (écart entre deux raies) est de $\Delta f = 50$Hz, vérifier que les trois mesures de la fréquence d'échantillonnage f_e données précédemment sont effectivement de plus en plus précises.



(a) Critère de Shannon respecté (b) $f_0 = 6.976$kHz

FIGURE 14.26 – Spectre FFT (dans un span partiel de 3800 kHz) délivré par le TMS320C50



(a) $f_0 = 11.8973$kHz (b) $f_0 = 90.2955$kHz

FIGURE 14.27 – Spectre FFT (dans un span partiel de 3800 kHz) délivré par le TMS320C50

Problème (12 points) : Résolution de l'analyseur de spectre

Les mesures de densité spectrale de puissance s'effectuent par un analyseur de spectre. Cet appareil fonctionne en effectuant un balayage de la bande spectrale du à analyser (appelée SPAN) et mesure la puissance du signal $x(t)$ à analyser dans une bande appelée BW (Fig.(14.82(a))). La mesure de la densité spectrale $Y(\nu_0)$ peut alors être approximée par :

$$Y(\nu_0) = \int_{SPAN} X(\nu) BW(\nu_0 - \nu) d\nu, \tag{14.50}$$

où $X(\nu)$ est le spectre du signal à analyser.

1. Mettre ce résultat sous la forme d'un produit de convolution de fonctions de type "portes" et de $X(\nu)$
2. En déduire la condition pour que la mesure soit parfaite (ie $Y(\nu_0) = X(\nu_0)$). Est-ce physiquement possible à réaliser ?
3. L'analyseur de spectre est utilisé pour étudier un système non linéaire (SNL) dont la représentation spectrale $X(\nu)$ est composée de 3 "raies" à $f_0, 2f_0, 3f_0$ (Fig.(14.29)) avec A, β, γ des constantes. Exprimer $X(\nu)$ sous la forme d'une somme de portes fréquentielles. Calculer $Y(\nu_0)$ en supposant que $BW(\nu) = \Pi_{BW}(\nu)$et que $BW < \frac{\Delta f}{10}$. Représenter graphiquement $Y(\nu_0)$ et déterminer la condition sur $BW, \Delta f$ et f_0 pour qu'il n'y ai pas de chevauchement des "raies" à $f_0, 2f_0$ et $3f_0$
4. La représentation spectrale donnée en (Fig.(14.29)) est celle d'un SNL excité par un signal ayant la représentation spectrale $X_0(\nu) = \Pi_{\Delta_f}(\nu - f_0)$(Fig.(14.82(b))). Pratiquement, le signal $x_0(t)$ est donné par un signal sinusoïdal de fréquence $f_0 = 1$MHz et de durée $T = 10$ms. Exprimer le spectre $X_0(\nu)$ et le représenter graphiquement.
5. En supposant que la bande Δf du signal d'excitation $x_0(t)$ se réduit à la largeur du lobe principal du sinc, calculer Δf en fonction de f_0 et l'on supposera par la suite que $X_0(\nu)$ est une porte d'amplitude $A = BT$ avec B une constante.
6. On souhaite évaluer la réponse $X(\nu)$ du SNL avec l'analyseur de spectre sur un SPAN de $4f_0$. Calculer le nombre minimal N_0 de mesures nécessaires à l'analyseur possédant une bande d'analyse $BW = \frac{3}{8} f_0$ pour scanner le SPAN de $4f_0$
7. Représenter graphiquement $Y(\nu_0)$ dans le cas du SPAN de $4f_0$ et $N = 12$ en prenant soin d'indiquer les amplitudes.

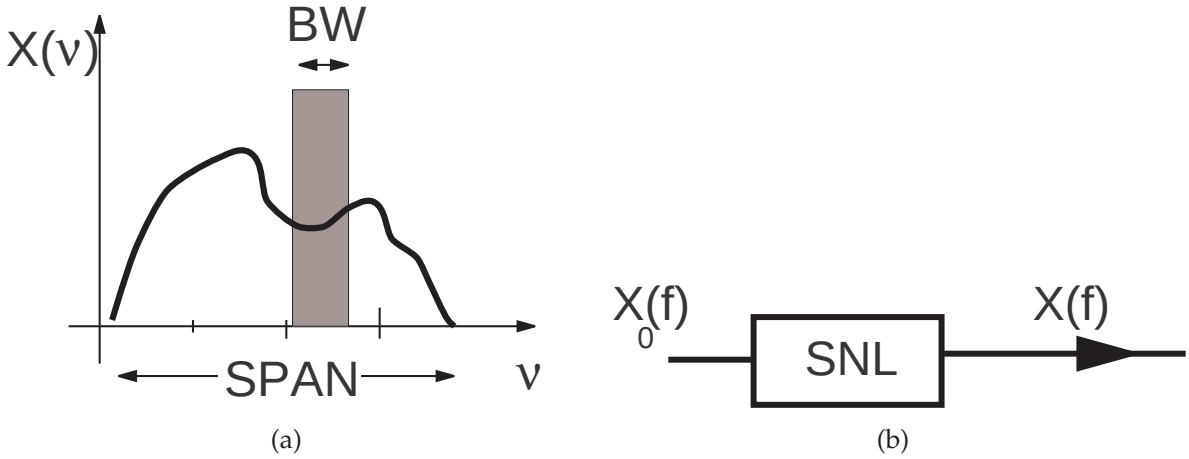


FIGURE 14.28 – (a) : propriétés de l'analyseur de spectre. (b) réponse su SNL

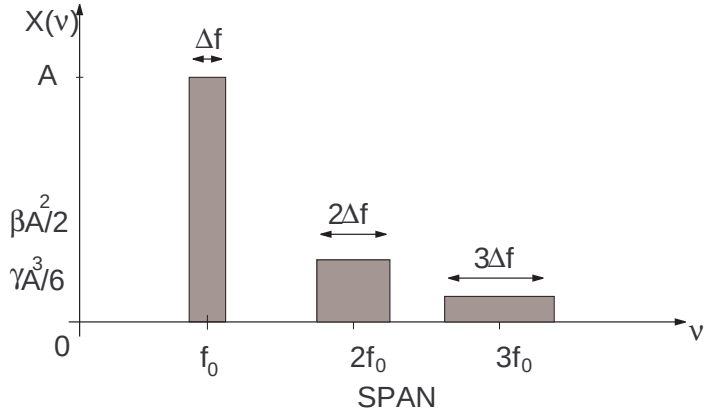


FIGURE 14.29 – Caractéristiques spectrales du SNL

Représentation temporelle	Représentation spectrale
Porte $x(t) = A\Pi_\tau(t)$	$X(\nu) = A\tau\frac{\sin(\pi\nu\tau)}{\pi\nu\tau}$
Sinusoïde tronquée $x(t) = A\sin(2\pi\nu_0 t)\Pi_\tau(t)$	$X(\nu) = \frac{jA\tau}{2}\left[\frac{\sin(\pi(\nu+\nu_0)\tau)}{\pi(\nu+\nu_0)\tau} - \frac{\sin(\pi(\nu-\nu_0)\tau)}{\pi(\nu-\nu_0)\tau}\right]$
Sinus cardinal $x(t) = A\frac{\sin(\pi\nu_0\tau)}{\pi\nu_0\tau}$	$X(\nu) = \frac{A}{\tau}\Pi_\tau(\nu)$
Triangle $x(t) = \Lambda_{2\tau}(t)$	$X(\nu) = A\tau\left[\frac{\sin(\pi\nu\tau)}{\pi\nu\tau}\right]^2$

TABLE 14.1 – *Transformées de Fourier de fonctions et distributions usuelles*

Mai 2008

École Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire

Examen de Traitement du Signal

Lundi 26 mai 2008
Durée : 2 heures

♠ Les exercices devront être rédigés sur des copies séparées. Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques

♡ Document autorisé : une feuille A4 recto verso (photocopie formellement interdite). Cette feuille peut comporter des notes personnelles, formules et résultats

♢ La calculatrice est autorisée

♣ Ce sujet comporte 5 pages dont 2 à rendre avec la copie, et sur lequelles vous aurez placé votre numéro d'identification anomyne

Exercice 1 (6 points) : Échantillonnage numérique 1D

Soit $X(f)$ le spectre (Transformée de Fourier) représenté en Fig.14.30a d'un signal audio continu $x(t)$.

1. On décide de numériser ce signal $x(t)$ à une fréquence $Fe = 22$ kHz. Donner l'expression du signal échantillonné $x_{Te}(t)$, en fonction de $x(t)$ et du peigne de Dirac.
2. Tracer le spectre $X_{Fe}(f)$ du signal échantillonné $x_{Te}(t)$ dans l'intervalle [-37 ;37] kHz.
3. Que se passe-t-il dans l'intervalle [7 ;15] ?
4. Soit un système physique ($\mathcal{S}$) caractérisé par la fonction $H(f)$ comme illustré en Fig.14.30b. Comment appelle-t-on la fonction $H(f)$?
5. Tracer le spectre de la fonction $Y(f)$ donné en sortie du système $\mathcal{S}$ représenté en Fig.14.30c.

6. Tracer le spectre $Y_{Te}(f)$ du signal échantillonné $y_{Te}(t)$dans l'intervalle [-37 ;37] kHz.
7. En déduire, en le justifiant, si ce sont les graves ou les aigus qui sont affectés lorsque l'on choisi un codage MP3 à 22 kHz plutôt qu'à 44 kHz.

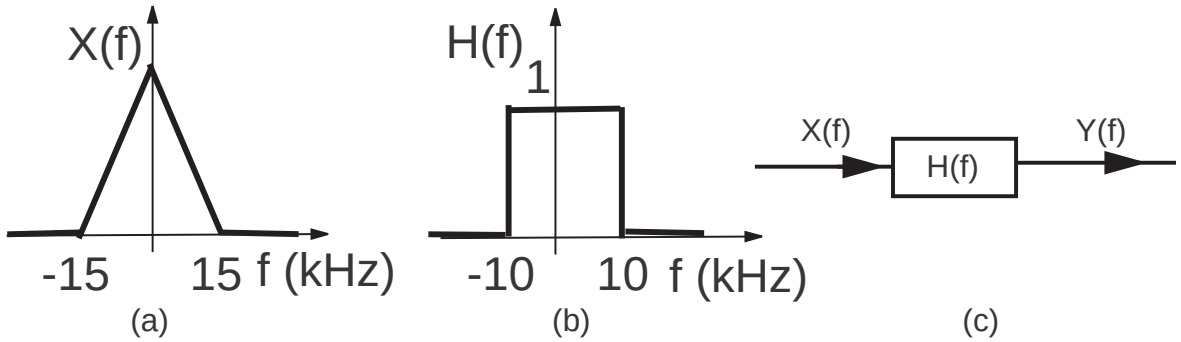


FIGURE 14.30 – (a) : spectre du signal audio. (b-c) : caractéristiques fréquentielles du système $\mathcal{S}$

Exercice 2 (7 points) : Cryptage par sous-échantillonnage

Un signal vocal $s_1(t)$ est filtré de façon à ne posséder aucune composante spectrale au delà de 4 kHz. On désire le crypter pour pouvoir sécuriser un système de transmission de données. Pour cela, on procède de la façon suivante (Fig.14.55) : le signal $s_1(t)$ est utilisé pour moduler en amplitude une porteuse sinusoïdale $p(t)$ de fréquence $f_p = 32$ kHz grâce à un modulateur en anneau. Le modulateur en anneau effectue une opération de multiplication entre les deux signaux $s_1(t)$ et $p(t)$. Le signal obtenu $z(t)$ est échantillonné à une fréquence f_e et est filtré par un filtre passe bas idéal de fréquence de coupure $f_c = 4$ kHz.

1. Calculer la puissance $\mathcal{P}_s$ du signal $s_1(t)$ (Application numérique : $C = 25.10^{-8}$ W/Hz). En déduire sa valeur en dBm (en supposant celui-ci généré par une source à 50Ω)
2. Calculer et représenter le module du spectre $Z(\nu)$
3. Tracer le spectre $Z_e(\nu)$ du signal échantillonné $z_e(t)$ avec $f_e = 100$ kHz, dans la bande [-150 kHz, +150 kHz]
4. Tracer le spectre $Z_e(\nu)$ du signal échantillonné $z_e(t)$ avec $f_e = 50$ kHz, dans la bande [-75 kHz, +75 kHz]. Expliquer le phénomène observé en justifiant la cause.
5. Quelle est la valeur qu'il faut donner à f_e pour que la spectre du signal crypté $Z_c(\nu)$ soit le résultat du renversement du spectre $S_1(\nu)$ suivant l'axe des fréquences (Fig.14.55b)
6. Représenter, dans ce cas et dans la bande [-10 kHz,+10 kHz], l'allure du spectre $Z_e(\nu)$ à la sortie de l'échantillonneur avant le filtrage
7. Comment, à partir du signal transmis, reconstituer le signal initial (décryptage) ?

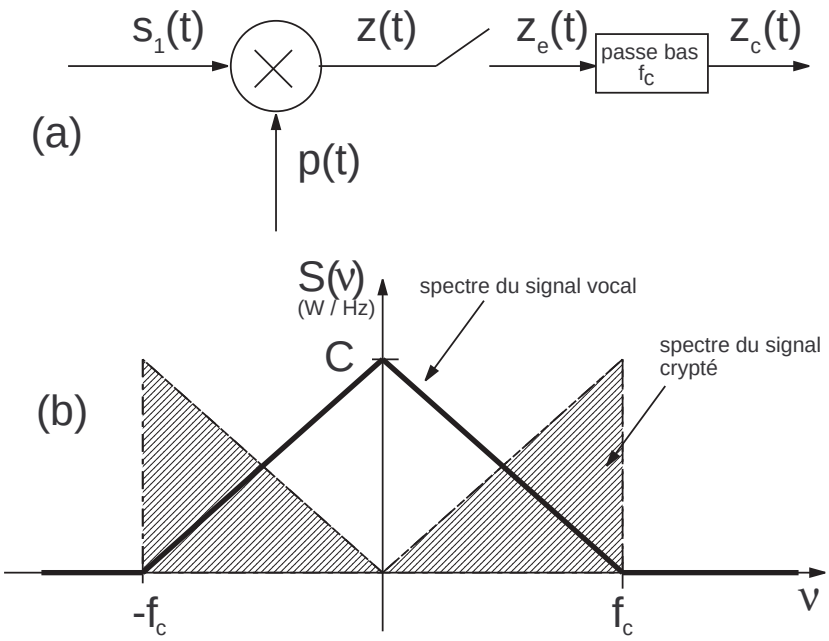


FIGURE 14.31 – (a) : Principe du cryptage d'un signal vocal avec un modulateur en anneau. (b) Spectre du signal vocal $s_1(t)$ et du signal crypté $z_c(t)$

Questions à choix multiples (7 points)

Cet exercice se présente sous la forme d'un questionnaire à choix multiples (QCM) de 14 questions avec une réponse juste parmi 2 propositions. Les deux pages 4 et 5 sont à joindre avec la copie. Le barème est le suivant :

- bonne réponse : +1/2
- mauvaise réponse : -1/2
- pas de réponse : 0

Numéro de carte d'étudiant :	
Questions	Réponses
La TF (Transformée de Fourier) d'une fonction porte de largeur T est a une fonction sinc de largeur $1/T$ b une fonction sinc de largeur infinie	1 a ☐ b ☐
La fenêtre de pondération de Hanning permet de a s'affranchir des discontinuités lié à la troncature du signal analysé par FFT b espacer et aérer les lignes de la FFT	2 a ☐ b ☐
Le spectre d'un signal quelconque périodique est uniquement constitué de raies a vrai b faux	3 a ☐ b ☐
Si on désire avoir plus de précision sur le spectre basse fréquence d'un signal échantillonné, il faut augmenter a la fréquence d'échantillonnage b le temps d'enregistrement du signal temporel	4 a ☐ b ☐
Comment s'écrit le signal échantillonné $x_e(t)$ du signal analogique $x(t)$ a $x_e(t) = x(t) * \sqcup\!\!\sqcup_T(t)$ b $x_e(t) = x(t).\sqcup\!\!\sqcup_T(t)$	5 a ☐ b ☐
La fréquence de Nyquist F_n est définie par $F_n = 2F_e$ où F_e est la fréquence d'échantillonnage a vrai b faux	6 a ☐ b ☐
La TF (Transformée de Fourier) d'une fonction réelle impaire est a imaginaire impaire b réelle paire	7 a ☐ b ☐

Numéro de carte d'étudiant :	
Questions	Réponses
La réponse $y(t)$ d'un système de réponse impultionnelle $h(t)$ à une excitation $x(t)$ est donné par $y(t) = x(t)h(t)$ a vrai b faux	8 a ☐ b ☐
Le gain complexe d'un système linéaire est la TF de sa réponse impultionnelle a vrai b faux	9 a ☐ b ☐
La TF (Transformée de Fourier) d'un peigne de Dirac de période T est a une somme d'impulsions de Dirac espacées de $1/T$ b une somme de fonctions constantes car la TF de la fonction de Dirac est une constante	10 a ☐ b ☐
Comment s'écrit une fonction périodique ? a $f(t) = f_T(t) * \sqcup\!\sqcup_T(t)$ b $f(t) = f_T(t).\sqcup\!\sqcup_T(t)$	11 a ☐ b ☐
Soit une chaîne de deux amplificateurs identiques placés en série. Un signal de puissance 0 dBm appliqué en entrée de chaîne sort à une puissance de 12 dBm. Le gain de chaque ampli a s'exprime en dB et vaut $G = 12/2$ b s'exprime sans unité et vaut $G = \frac{10^{12/20}}{10^{2/20}}$	12 a ☐ b ☐
La convolution de $x(t)$ par $\delta(t - t_0)$ est equivalent à a effectuer une translation de t_0 b effectuer la dérivée en $t = t_0$	13 a ☐ b ☐
La FFT est une approximation de la Transformée de Fourier a vrai b faux	14 a ☐ b ☐

Janvier 2009

École Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire

Examen de Traitement du Signal

Lundi 26 janvier 2009
Durée : 2 heures

Les exercices devront être rédigés sur des copies séparées. Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques.

Documents autorisés : Feuille A4 recto verso avec notes personnelles, formules et résultats (photocopies formellement interdites)

Documents interdits : annales et correction de cet examen

Ce sujet comporte 5 pages dont une annexe.

Exercice 1 (6 points) : Bruit de quantification

Lors d'un processus de conversion d'un signal analogique $x(t)$ en un signal numérique $x_q(t)$, une erreur systématique est générée et conduit à un bruit de quantification $e(t,s)$ que l'on peut considérer, à un instant t donné, comme étant aléatoire (paramètre s) et supposé suivre une loi uniforme $f_e(s) = Cte$. Deux types de conversions, caractérisées par le pas de quantification q, sont possibles :

- ▲ la conversion par troncature qui consiste à ne garder qu'un certain nombre de chiffres significatifs. Exemple : $e = 2.718$ avec 3 chiffres significatifs
- ▼ la conversion par arrondi qui consiste à arrondir au chiffre le plus proche. Exemple : $e = 2.72$ avec 2 chiffres significatifs

1. Représenter graphiquement les courbes $x_q(t)$ en fonction de $x(t)$ dans les deux cas de conversion par troncature et par arrondi pour un signal type $x(t)$ représenté par la figure 14.108
2. Exprimer $e(t)$ en fonction de $x_q(t)$ et $x(t)$ sachant que l'on veut $e(t) \geq 0$ pour la conversion par troncature. En déduire le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la variable aléatoire $e(t)$ dans le cas d'une

conversion par troncature et dans le cas d'une conversion par arrondi

3. En utilisant $\int_{\mathcal{D}} f_e(s)ds = 1$, montrer que la distribution $f_e(s)$ est identique dans le cas des 2 types de conversion.

4. Montrer que l'espérance statistique (valeur moyenne) est différente suivant le mode de conversion choisi. En déduire celle qui présente un biais (composante continue)

5. Calculer la variance statistique σ_e^2 pour les deux types de conversion. En déduire que la puissance $\mathcal{P}_e$ du bruit de quantification est identique quelque soit le mode de conversion choisi et vaut :

$$\mathcal{P}_e = \frac{q^2}{12} \tag{14.51}$$

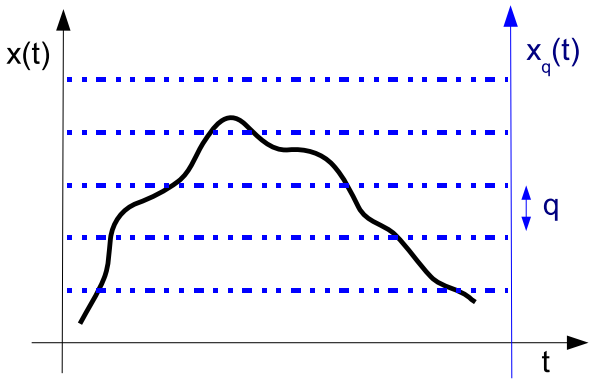


FIGURE 14.32 – *Principe de quantification du signal $x(t)$. La plage de variation du signal est découpée en N intervalles de largeur q afin de générer un signal numérique $x_q(t)$ (non indiqué ici) qui dépend du mode de conversion*

Exercice 2 (14 points) : Filtrage de signal aléatoire gaussien

Soit un signal aléatoire gaussien centré $x(t)$ de loi Normale $\mathcal{N}$ dont la densité spectrale de puissance unilatérale $S_x(f)$ est donnée par la figure Fig.14.109(b). Cette densité spectrale possède un comportement basse fréquence de type $1/f$ qui commence à la fréquence f_2 (appelée "corner frequency") et s'étend jusqu'à f_1 liée à la durée totale d'acquisition du signal. Ce signal est échantillonné à l'aide d'un échantillonneur de fréquence d'échantillonnage $f_s = 192$ kHz (f_s : frequency sampling).

Afin d'éviter tout repliement de spectre, on place avant l'échantillonneur un filtre anti-repliement ; filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_3 = f_s/2$ (Fig.14.109(a)). Ce filtre permet de vérifier le critère de Shannon.

Questions préliminaires :

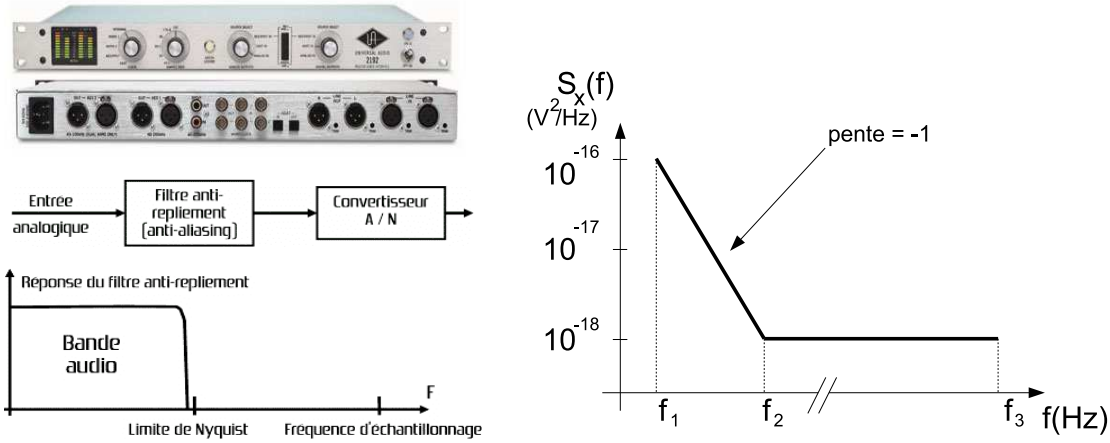


FIGURE 14.33 – *(a) échantillonneur Universal Audio 2192 Ultra-low noise 44.1kHz - 192kHz. (b)Densité spectrale unilatérale $S_x(f)$ du signal aléatoire $x(t)$*

1. Comment s'appelle le bruit dans l'intervalle $[f_2; f_3]$
2. Rappeler l'expression de la transformée de Fourier $X(\nu)$ d'un signal $x(t)$. Comment peut-on obtenir la valeur moyenne temporelle $\int x(t)dt$ à partir de $X(\nu)$?
3. Rappeler le lien entre $X(\nu)$ et $S_x(f)$
4. Rappeler l'hypothèse ergodique concernant les valeurs moyennes statistiques et temporelles
5. En déduire que l'hypothèse ergodique d'un signal centré est incompatible avec une caractéristique en $1/f$ de $S_x(f)$

Cas 1 : durée de l'enregistrement : $T_1 = 1$s

1. Calculer la fréquence de coupure basse fréquence que l'on peut avoir dans le spectre $S_x(f)$ du signal $x(t)$ enregistré sur T_1. On supposera, dans ce cas, que cette valeur correspond à f_1
2. Déterminer la fréquence de coupure f_2 appelée "corner frequency" sachant que la densité spectrale de puissance $S_x(f)$ suit une loi en $1/f$: $S_x(f) = C/f$.
3. Calculer la puissance totale $\mathcal{P}_1$ du signal (en V^2). En déduire la probabilité pour que $x(t) > 40$nV

Cas 2 : durée de l'enregistrement : $T_2 = 10$s

1. Calculer la fréquence de coupure basse fréquence que l'on peut avoir dans le spectre $S_x(f)$ du signal $x(t)$ enregistré sur T_2. On supposera, dans ce cas, que cette valeur correspond à f_1
2. Calculer la puissance totale $\mathcal{P}_2$ du signal (en V^2). En déduire la probabilité pour que $x(t) > 40$nV

3. On souhaite utiliser un moyennage du signal $x(t)$ pour diminuer la variance σ_2 du signal enregistré sur 10s et la rendre égale à celle de σ_1 enregistré sur 1s. Calculer le nombre M de moyennages successifs à effectuer pour avoir $\sigma_2^{(M)} \leq \sigma_1$.
4. Comparer les tailles du fichier numérique généré pour les cas 1 et 2 avec M acquisitions successives. Interpreter le résultat

Rappel (extrait du cours de Traitement du Signal TS2) :

Si on construit un signal $z(t)$ par moyennage successif de M points du signal $y(t)$ de variance σ_y^2, *i.e.*

$$z(t) = \frac{1}{M} \sum_{0}^{M-1} y(t - k\theta), \tag{14.52}$$

la variance de $z(t)$, s'écrit

$$\sigma^2[z(t)] = \frac{1}{M^2} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \sigma_y^2 \delta(k-l) = \frac{1}{M^2} \sum_{k=0}^{M-1} \sigma_y^2 = \frac{\sigma_y^2}{M}. \tag{14.53}$$

ANNEXE

Intégrale $\Pi(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;1)$

$$\Pi(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{et} \quad \Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Mai 2009 (3ème Année ENIVL)

École Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire

Examen de Traitement du Signal

Lundi 25 mai 2009
Durée : 2 heures

♠ Les exercices devront être rédigés sur des copies séparées. Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques

♡ Document autorisé : une feuille A4 recto verso (photocopie formellement interdite). Cette feuille peut comporter des notes personnelles, formules et résultats

♢ La calculatrice est autorisée

♣ Ce sujet comporte 7 pages

Exercice 1 (6 points) : Caractérisation spectrale d'un signal par FFT

La transmission d'un message $m(t)$ avec un signal $x(t)$ (porteuse sinusoïdale de fréquence f_0 modulé en amplitude) est analysé à partir de la FFT disponible sur l'oscilloscope numérique de type HP 33120A utilisé lors des séances de Travaux Pratiques. La figure 14.34 représente : le signal échantillonné (en haut) et le spectre FFT (en bas) réalisé sur ce signal en respectant le critère d'échantillonnage de Shannon.

1. Rappeler ce critère en spécifiant le lien entre la fréquence maximale F_{max} affichée par un spectre FFT et la fréquence d'échantillonnage F_e
2. En déduire, en justifiant, et à partir de la figure 14.34(a)
   - la fréquence d'échantillonnage F_e
   - la fréquence f_0 de la porteuse
   - forme et le contenu fréquentiel du message $m(t)$
3. Représenter graphiquement l'allure de la FFT de ce signal $x(t)$ échantillonné à une fréquence de 400 kHz
4. Interpreter la figure 14.34(b) où la fréquence d'échantillonnage utilisée était de 100 kHz et où 5 repliements de spectre ont été constatés. En déduire une valeur plus précise de f_0
5. Sachant que la base de temps est de 100 μs/division, en déduire, avec la figure 14.34(a) le nombre de point $N = 2^n$ du signal échantillonné sachant que la durée totale du signal est celle affichée sur l'écran de l'oscilloscope
6. Montrer que ce nombre de points N est le même pour la figure 14.34(b)

Exercice 2 (7 points) : Spectre de réception de la bande FM

La bande FM peut être explorée à l'ENIVL avec un dispositif de reception et de traitement du signal très sensible. Le spectre mesuré est présenté sur les figures(14.91-14.92) où l'on représente la densité spectrale de puissance $S_x(f)$ d'un signal $x(t)$ en fonction de la fréquence d'analyse f (en MHz), mesurée avec l'analyseur de spectre HP8590 utilisé lors des séances de Travaux Pratiques.

1. Sachant que la sensibilité en ordonnée est de 10 dB/division, identifier, par leur position en fréquence, et à l'aide de la figure 14.91(a) les raies dont la puissance est supérieure à -72 dBm. Pour info, la raie de puissance maximale (-68 dBm) est identifiée par un marqueur (petit losange)
2. La mesure de la puissance est effectuée à partir d'un filtrage du signal $x(t)$ comme présenté en Travaux Pratiques (Figure 14.93) dans une bande dont la résolution BW est indiquée sur les figures (14.91-14.92). Expliquer pourquoi le spectre de la figure 14.91(b) possède des raies plus larges que celles de la figure 14.91a

3. Rappeler le principe fondamental du Traitement du Signal permettant d'expliquer la différence de durée de mesure (appelée SWP)
4. Un agrandissement du spectre dans la bande [100.0 ;102.0] MHz est présenté en figure (14.92). En déduire une valeur précise de la fréquence porteuse des deux raies présentes sur ce spectre et émises par deux stations FM différentes.
5. La figure 14.92(b) présente le spectre $S_x(f)$ mesuré avec une résolution BW de 300 Hz. Évaluer la bande fréquentielle de l'information contenue dans les deux porteuses
6. Préciser, en fonction de ces fréquences, leur nature physique (type d'ondes)
7. Indiquer approximativement, et au regard des deux raies, la station émettant l'information la plus puissante.

Exercice 3 (7 points) : Convolution de signaux

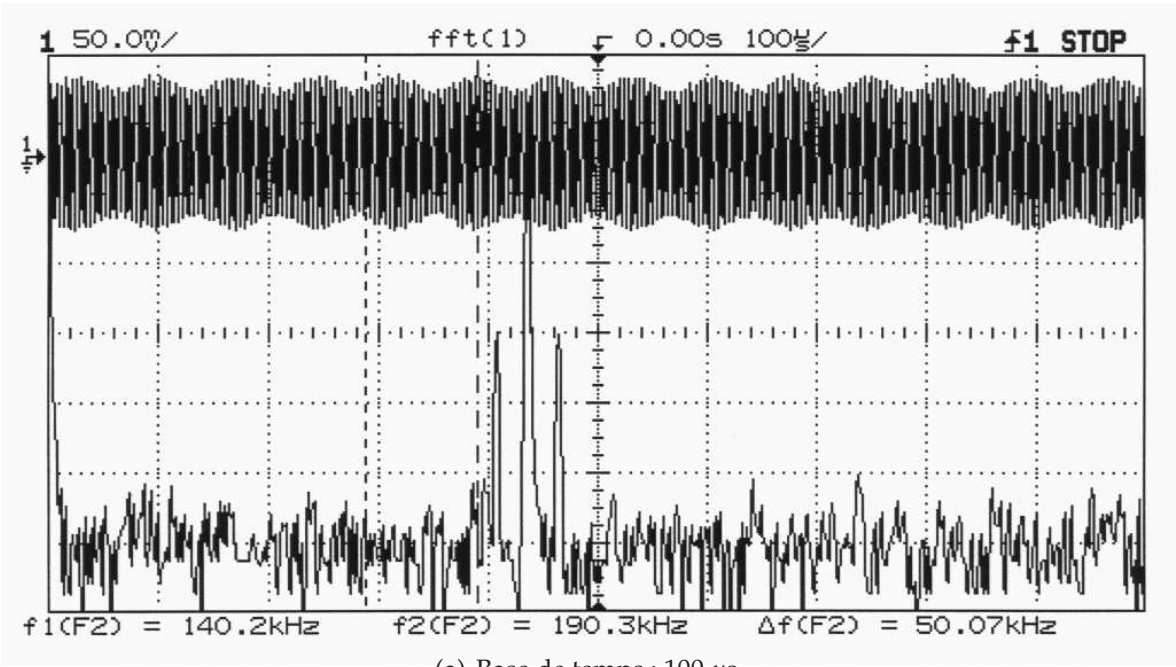
Soit les deux fonctions réelles $f(\nu)$ et $g(\nu)$ dont on veut déterminer la convolution $y(\nu) = f(\nu) * g(\nu)$ (Fig.14.38). On se propose de décomposer $f(\nu)$ en une somme de deux portes $\Pi_{\Delta\nu}(\nu)$ et à utiliser les propriétés de linéarité de l'opération de convolution de façon à évaluer $y(\nu)$.

1. On se place dans le cas $\nu_0 = 0$. Pour chaque porte $\Pi^{(i)}_{\Delta\nu}(\nu)$ du signal $f(\nu)$:
   - déterminer intervalle de fréquence sur lequel la valeur de $y^{(i)}(\nu)$ est non nulle
   - déterminer le ou les fréquence(s) où $y^{(i)}(\nu)$ atteint son maximum
   - Calculer $y^{(i)}(\nu)$ et donner son l'allure graphique
2. En déduire la représentation graphique de $y(\nu)$ pour $\nu_0 = 0$
3. En déduire une représentation graphique de $y(\nu)$ lorsque $\nu_0 = 0.5$

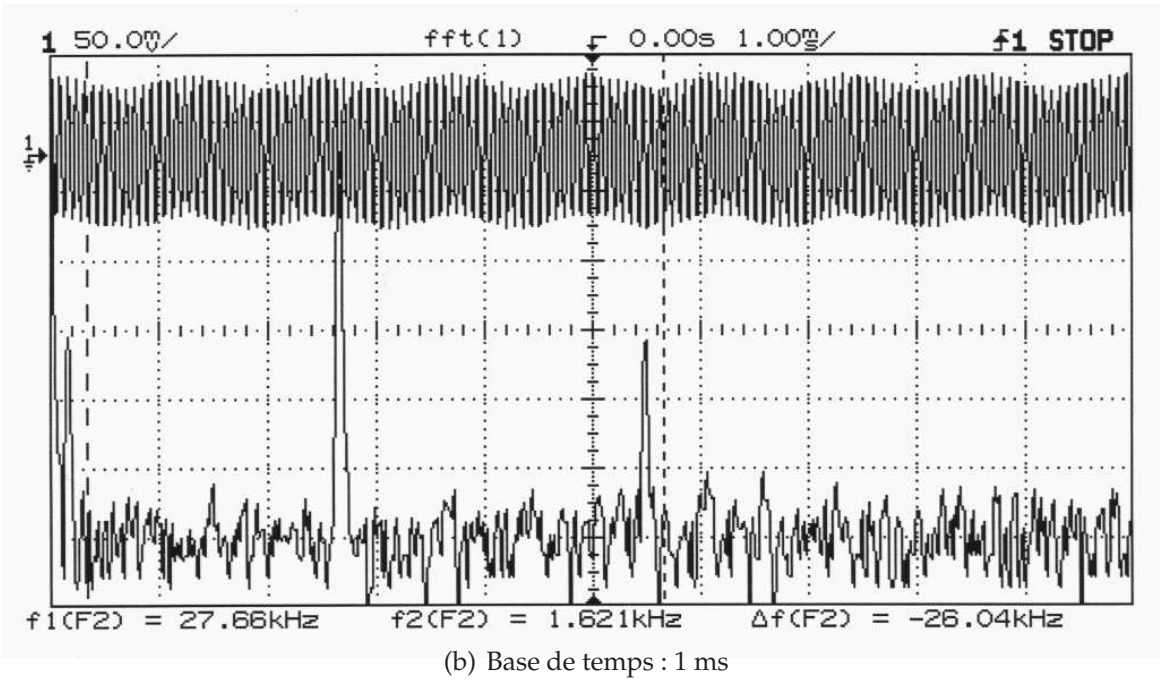
Question bonus : Comparer et interprétez les figures 14.92 et 14.38 et les représentations graphiques précédentes

Rappel :

$$\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = \Lambda_{2T}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{T} & \text{si} \quad 0 < t < T \\ 1 + \frac{t}{T} & \text{si} \quad -T < t < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{14.54}$$

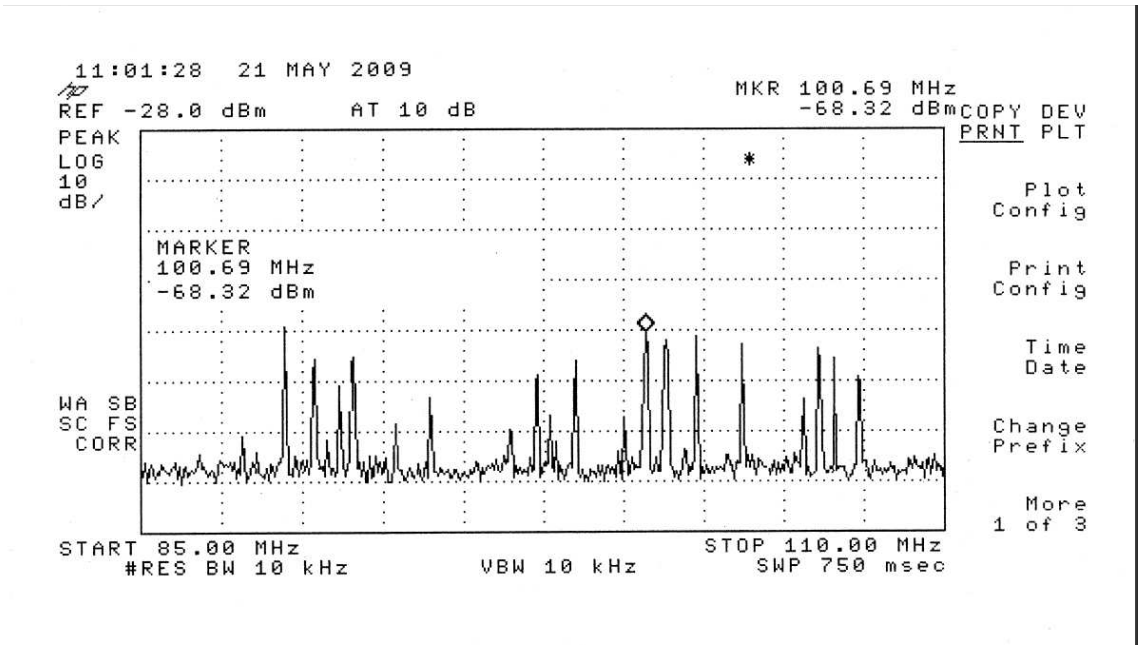


(a) Base de temps : 100 μs

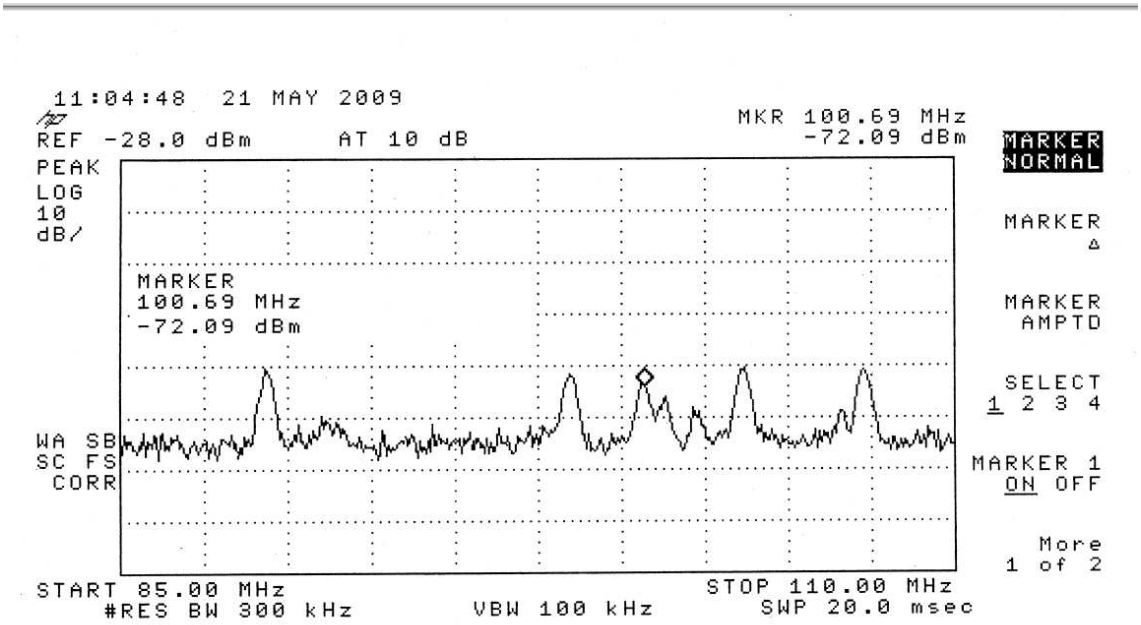


(b) Base de temps : 1 ms

FIGURE 14.34 – *Représentation temporelle (en haut) d'un signal sinusoïdal modulé en amplitude et son spectre (en bas) évalué à l'aide de la FFT disponible sur l'oscilloscope numérique HP33120A*

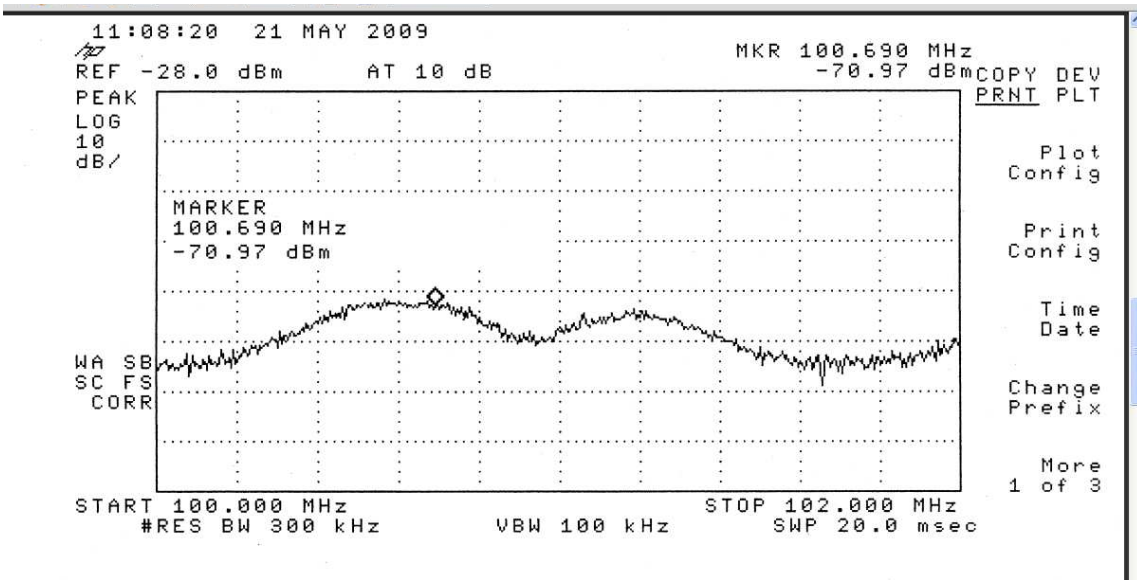


(a) BW= 10 kHz

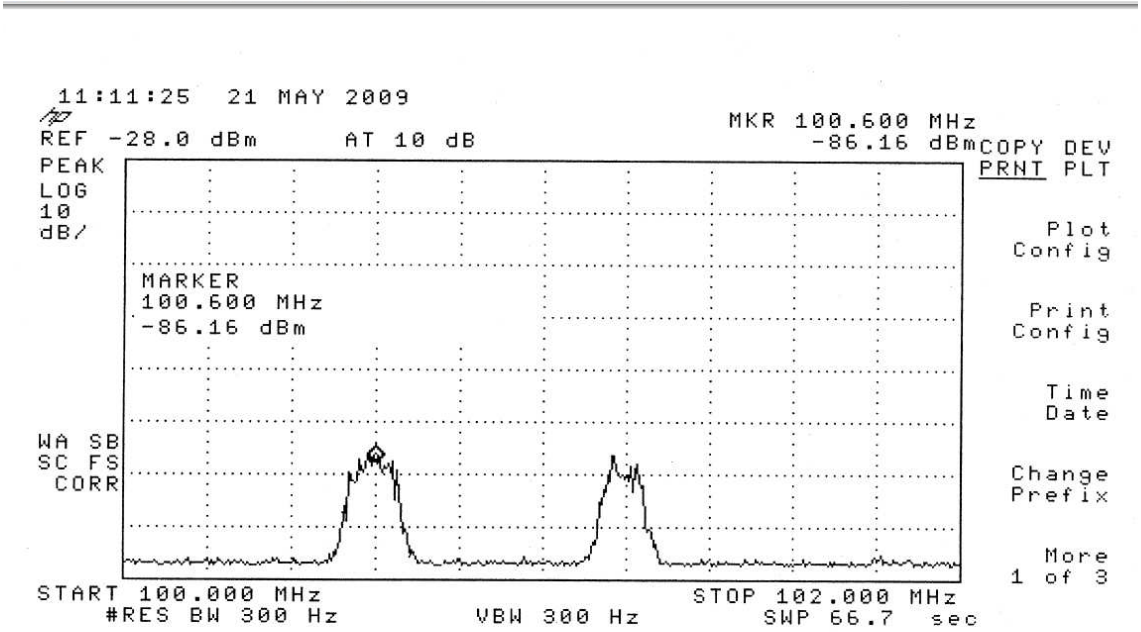


(b) BW= 300 kHz

FIGURE 14.35 – *Densité spectrale de puissance $S_x(f)$ d'un signal $x(t)$ mesurée dans la bande FM 85.0-110.0 MHz avec un analyseur de spectre HP8590*



(a) BW= 300 kHz



(b) BW= 300 Hz

FIGURE 14.36 – *Densité spectrale de puissance $S_x(f)$ d'un signal $x(t)$ mesurée dans la bande FM 100.0-102.0 MHz avec un analyseur de spectre HP8590*

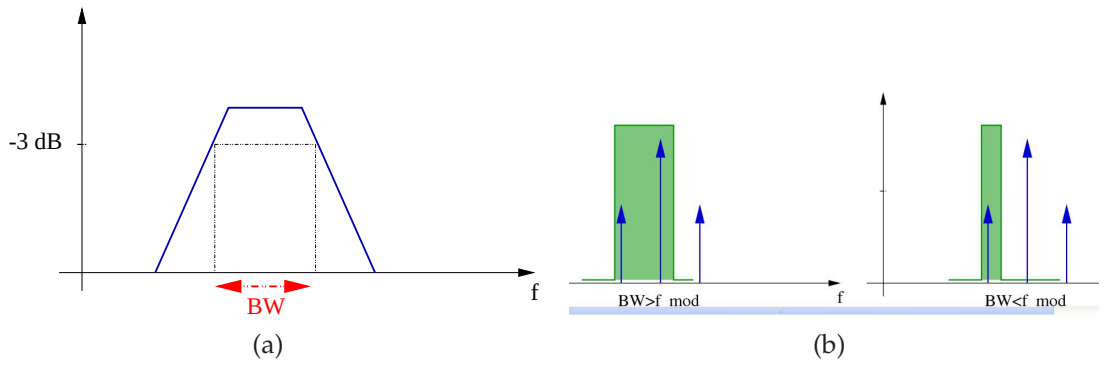


FIGURE 14.37 – *Réponse fréquentielle du filtre analogique définissant le paramètre BW de l'analyseur de spectre HP8590. Dans les analyseurs de spectre analogiques, la bande spectrale d'analyse BW correspond à la largeur du filtre passe bande sélectif centré autour de la fréquence d'analyse f_0 et permet la mesure de la puissance spectrale du signal*

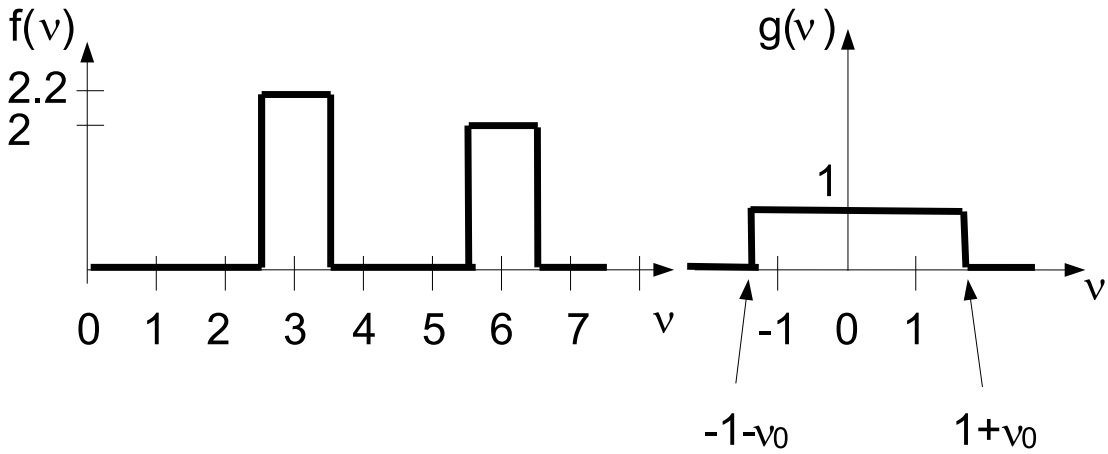


FIGURE 14.38 – Convolution de deux fonctions

Septembre 2009 (3ème Année ENIVL)

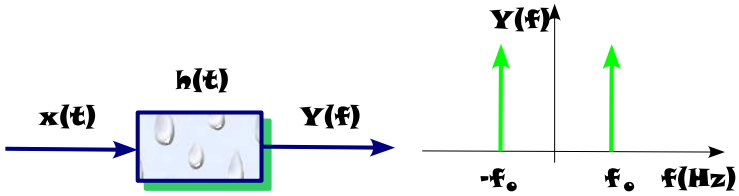
École Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire

Traitement du Signal : oral de rattrapage

Lundi 31 août 2009
Durée : 15 mn avec 15 mn de préparation

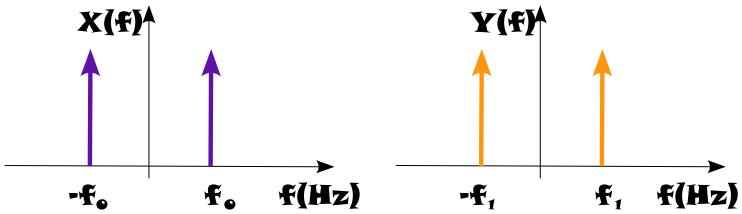
Sujet 1 : Analyse des systèmes

Exprimer $H(f)$ lorsque $x(t) = \delta(t)$



Sujet 2 : Convolution et distribution

Calculer la convolution entre $x(t)$ et $y(t)$



Janvier 2010 (4ème Année ENIVL)

École Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire

Examen de Traitement du Signal

Lundi 25 janvier 2010
Durée : 2 heures

- Les exercices devront être rédigés sur des copies séparées
- Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques
- Document autorisé : 1 feuille A4 recto verso avec notes personnelles, formules et résultats (photocopie formellement interdite)
- Documents interdits : annales et correction de cet examen
- Les téléphones portables ne sont pas autorisés et devront être éteints
- Ce sujet comporte 5 pages dont 2 annexes

Exercice 1 : Bruit de l'amplificateur OPA378 (14 points)

Considérons un amplificateur opérationnel OPA378 nouvelle génération (octobre 2009) faible bruit dont les caractéristiques techniques sont données en Annexe 1. Cet amplificateur possède un bruit interne qui peut être modélisé (Fig.14.52) par deux sources aléatoires de tension e_n et de courant i_n. Dans l'annexe, les densités spectrales sont exprimées en nV/$\sqrt{Hz}$ et en fA/$\sqrt{Hz}$ (rappel : 1 fA=10^{-15}A). L'objectif de cette étude est de calculer la puissance de la tension de bruit de sortie de l'amplificateur.

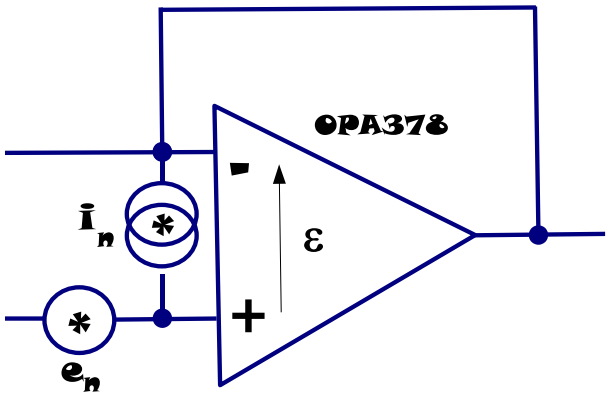


FIGURE 14.39 – *Amplificateur OPA378 bruité en montage suiveur*

1. Rappeler les expressions de la puissance d'un signal aléatoire dans le domaine temporel et dans le domaine spectral
2. Donner les unités de la densité spectrale de puissance de bruit dans le cas où le signal aléatoire est une tension (exprimée en Volts) et un courant (exprimé en Ampères)
3. Calculer la puissance dans le domaine spectral du bruit de tension e_n dans la bande [1,10]Hz
4. Calculer la puissance dans le domaine spectral du bruit de courant i_n dans la bande [1,10]Hz
5. Lorsqu'il est utilisé en montage suiveur, l'OPA378 délivre un bruit de sortie e_s donné par

$$e_s = e_n + R_e i_n, \tag{14.55}$$

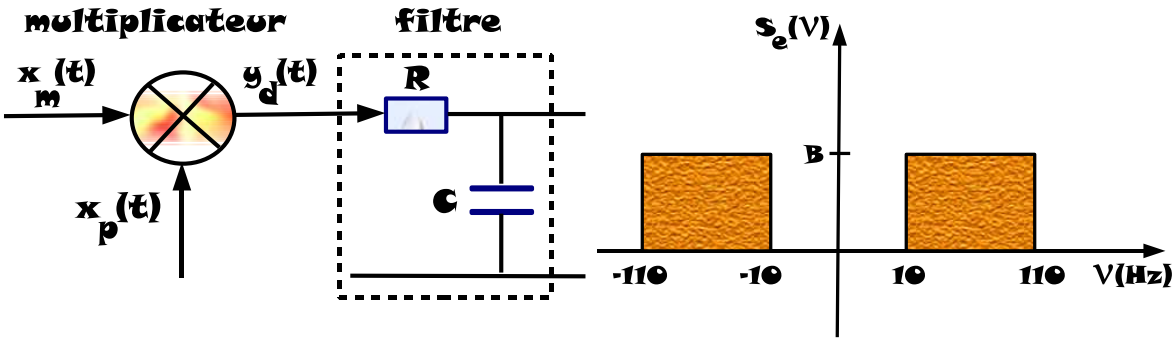
   où R_e est la résistance d'entrée de l'OPA378. En supposant les deux sources de bruit i_n et e_n non corrélées, montrer que la puissance du bruit e_s (dans le domaine temporel) est donné par

$$e_s^2 = e_n^2 + R_e^2 i_n^2. \tag{14.56}$$

6. Calculer la puissance du bruit dans le cas $R_e = 10\text{k}\Omega$
7. En supposant la distribution gaussienne du bruit (Annexe 2), calculer la probabilité pour que la tension du bruit dépasse 80 nV. Comparez cette valeur avec la figure 1 de l'Annexe 1

Exercice 2 : Bruit dans un multiplicateur (6 points)

Une tension $U(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$ d'amplitude $A = 1$V et de fréquence $f_0 = 30$Hz est noyée dans un bruit $e(t)$ d'amplitude quadratique moyenne $\sqrt{< e^2(t) >} = \sigma_e$=2V et supposé blanc entre 10Hz et 110Hz. On supposera que sa densité spectrale de puissance $S_e(\nu)$ est nulle en dehors de cette bande (Fig.14.53b).



(a) (b)

FIGURE 14.40 – *(a) Système étudié. (b) Spectre du bruit $e(t)$ supposé blanc dans la bande [10-110]Hz*

1. Calculer la valeur B de la densité spectrale de puissance (exprimée en V^2/Hz)
2. La tension bruitée $x_m(t) = U(t) + e(t)$ est appliquée à l'entrée d'un multiplicateur délivrant une sortie $y_d(t) = x_m(t)x_p(t)$ où $x_p(t) = 2A\cos(2\pi f_0 t)$ est une tension synchrone (en phase) non bruitée. Exprimer $y_d(t)$ en fonction de A, f_0 et $b(t)$
3. En déduire que le spectre $Y_d(\nu)$ s'écrit :

$$Y_d(\nu) = A^2\delta(\nu) + \frac{A^2}{2}\left[\delta(\nu - 2f_0) + \delta(\nu + 2f_0)\right] + A\left[S_e(\nu - f_0) + S_e(\nu + f_0)\right] \tag{14.57}$$

4. Représenter graphiquement $Y_d(\nu)$
5. La sortie $y_d(t)$ est ensuite filtrée par un système passe bas (supposé idéal) de fréquence de coupure $f_c = 20$Hz. Calculer la puissance du bruit $e_1(t)$ en sortie du filtre et son écart-type σ_{e_1} (en Volts)
6. Représenter graphiquement $Y_{e_1}(\nu)$, le spectre du bruit filtré

ANNEXE 1

TYPICAL CHARACTERISTICS

At T_A = +25°C, R_L = 10kΩ, V_S = +5.5V and V_{OUT} = V_S/2, unless otherwise noted.

0.1Hz TO 10Hz NOISE

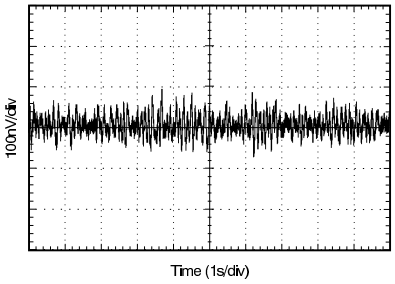


Figure 1.

INPUT CURRENT AND VOLTAGE NOISE SPECTRAL DENSITY vs FREQUENCY

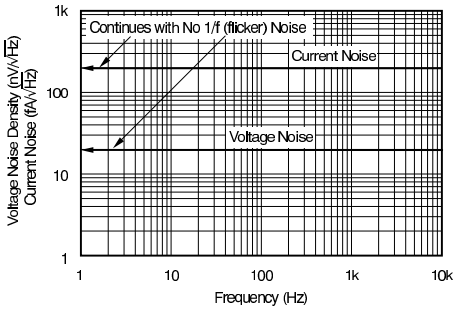


Figure 2.

OFFSET VOLTAGE PRODUCTION DISTRIBUTION

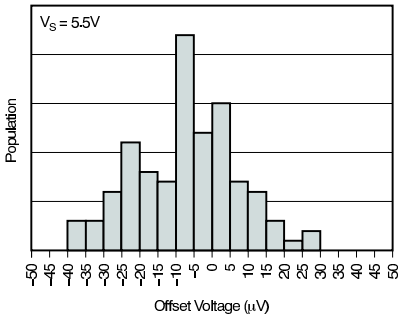


Figure 3.

OFFSET VOLTAGE DRIFT DISTRIBUTION

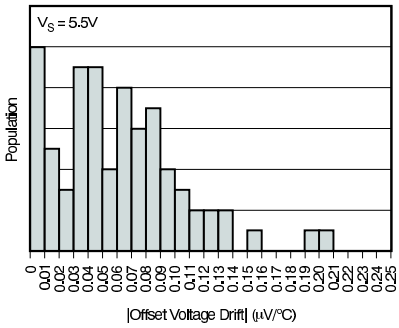


Figure 4.

Copyright © 2008–2009, Texas Instruments Incorporated

ANNEXE 2

Intégrale $\Pi(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;1)$

$$\Pi(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{et} \quad \Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Juin 2010 (3ème Année ENIVL)

École Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire

Examen de Traitement du Signal (TS1)

Jeudi 3 juin 2010
Durée : 2 heures

Les 3 parties sont indépendantes et devront être rédigées sur des copies séparées.

- Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques
- Document autorisé : 1 feuille A4 recto verso avec notes personnelles manuscrites (photocopie formellement interdite)
- calculatrice autorisée
- Documents interdits : annales et correction de cet examen
- Les téléphones portables ne sont pas autorisés et devront être éteints
- Ce sujet comporte 3 pages

Questions de cours (4 points)

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $p(t) = A\cos(2\pi f_p t)$
2. Rappeler la définition précise de la convolution entre les deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$
3. Calculer $\int f(u)\delta(y - y_0 - u)du$. Rappel : $\int f(u)\delta(u)du = f(u = 0)$
4. Soit $\{x_n\}$ un signal numérique ayant été échantillonné à 2 kHz. Le calcul de la FFT de ce signal indique une raie à 400 Hz. En déduire la fréquence du signal sachant que celle-ci est comprise entre 1kHz et 2 kHz

Exercice 1 (8 points) : Identification de raies spectrales

Soit les deux fonctions réelles $f(\nu)$ et $g(\nu)$ dont on veut déterminer la convolution $y(\nu) = f(\nu) * g(\nu)$ (Fig.14.54). On se propose de décomposer $f(\nu)$ en une somme de deux portes $\Pi^{(i)}_{\Delta\nu}(\nu)$, $i = 1;2$, et d'utiliser les propriétés de linéarité de l'opération de convolution de façon à évaluer $y(\nu) = y^{(1)}(\nu) + y^{(2)}(\nu)$.

1. On se place dans le cas $\nu_0 = 1$. Pour chaque porte $\Pi^{(i)}_{\Delta\nu}(\nu)$ du signal $f(\nu)$:
   - déterminer intervalle de fréquence $\mathcal{D}^{(i)}$ sur lequel la valeur de $y^{(i)}(\nu)$ est non nulle
   - déterminer la ou les fréquence(s) où $y^{(i)}(\nu)$ atteint son maximum
   - Calculer $y^{(i)}(\nu)$ et donner son l'allure graphique
2. Représenter, en justifiant, $y(\nu)$ pour $\nu_0 = 0.5$
3. En déduire la valeur minimale permettant de séparer les deux réponses $y^{(i)}(\nu)$, soit $\mathcal{D}^{(1)} \bigcap \mathcal{D}^{(2)} = \emptyset$
4. En conclure sur une application concrète de ce calcul pour l'analyse spectrale

Rappel :

$$\Pi_L(x) * \Pi_L(x) = \Lambda_{2L}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{L} & \text{si} \quad 0 < x < L \\ 1 + \frac{x}{L} & \text{si} \quad -L < x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{14.58}$$

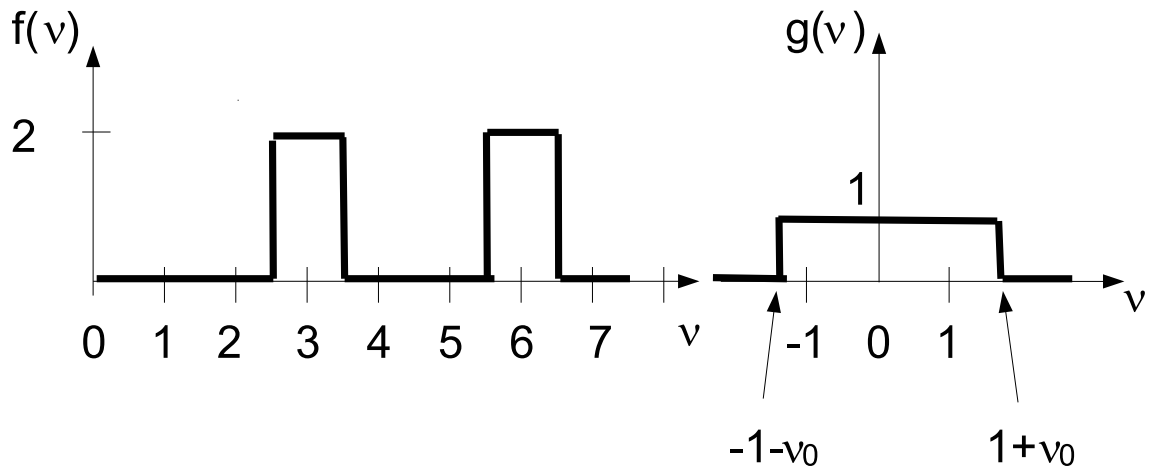


FIGURE 14.41 – Convolution de deux fonctions pour identification de raies spectrales

Exercice 2 (8 points) : Codage audio par sous-échantillonnage

Un signal audio $s_1(t)$ est filtré de façon à ne posséder aucune composante spectrale au delà de 2 kHz. On désire le coder par un cryptage secret pour pouvoir sécuriser un système de transmission

vocal. Pour cela, on utilise un processus de modulation classique (Fig.14.55a) : le signal $s_1(t)$ est utilisé pour moduler en amplitude une porteuse sinusoïdale $p(t) = A\cos(2\pi f_p t)$ de fréquence $f_p = 16$ kHz grâce à un modulateur en anneau. Le modulateur en anneau effectue une opération de multiplication entre les deux signaux $s_1(t)$ et $p(t)$. Le signal obtenu $z(t)$ est ensuite échantillonné à une fréquence d'échantillonnage f_e. Enfin, ce signal échantillonné $z_e(t)$ est filtré par un filtre passe bas idéal de fréquence de coupure $f_c = 2$ kHz.

1. Après avoir exprimé $z(t)$ en fonction de $s_1(t)$ et $p(t)$, calculer et représenter le module du spectre $Z(\nu)$, où $Z(\nu)$ est la transformée de Fourier de $z(t)$.
2. Tracer le spectre $Z_e(\nu)$ du signal échantillonné $z_e(t)$ avec $f_e = 25$ kHz, dans la bande [-40 kHz, +40 kHz]. Expliquer le phénomène observé en justifiant la cause
3. Quelle est la valeur qu'il faut donner à f_e pour que le spectre du signal crypté $Z_c(\nu)$ soit le résultat du renversement du spectre $S_1(\nu)$ suivant l'axe des fréquences (Fig.14.55b)
4. Représenter, dans ce cas et dans la bande [-5 kHz,+5 kHz], l'allure du spectre $Z_e(\nu)$ à la sortie de l'échantillonneur avant le filtrage
5. Comment, à partir du signal transmis, reconstituer le signal initial (décryptage) ?

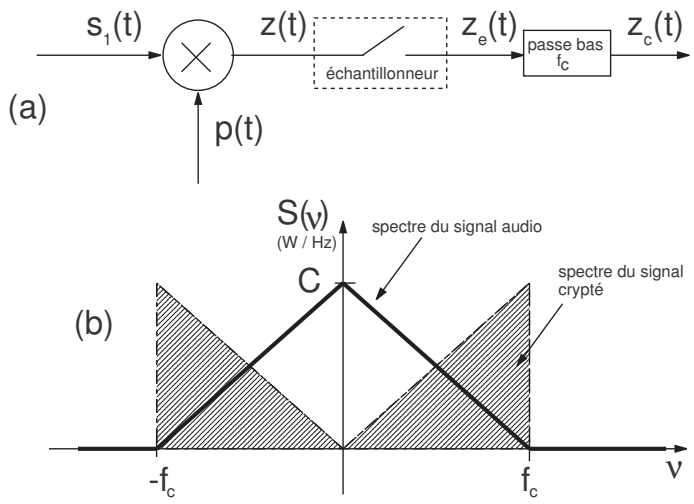


FIGURE 14.42 – (a) : Principe du cryptage d'un signal audio avec un modulateur en anneau. (b) Spectre du signal audio $s_1(t)$ et du signal crypté $z_c(t)$

Septembre 2010 (3ème Année ENIVL)

École Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire

Examen de Traitement du Signal (TS1)

Mardi 31 août 2010
Durée : 2 heures

- Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques
- Document autorisé : 1 feuille A4 recto verso avec notes personnelles manuscrites (photocopie formellement interdite)
- Calculatrice autorisée
- Documents interdits : annales et correction de cet examen
- Les téléphones portables ne sont pas autorisés et devront être éteints
- Ce sujet comporte 5 pages

Questions de cours (6 points)

Exercice 1 : Calculer et représenter graphiquement le produit de convolution des deux fonctions présentées en Fig.14.103

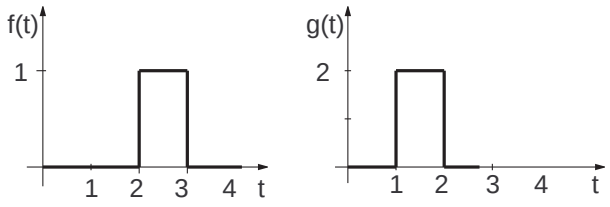


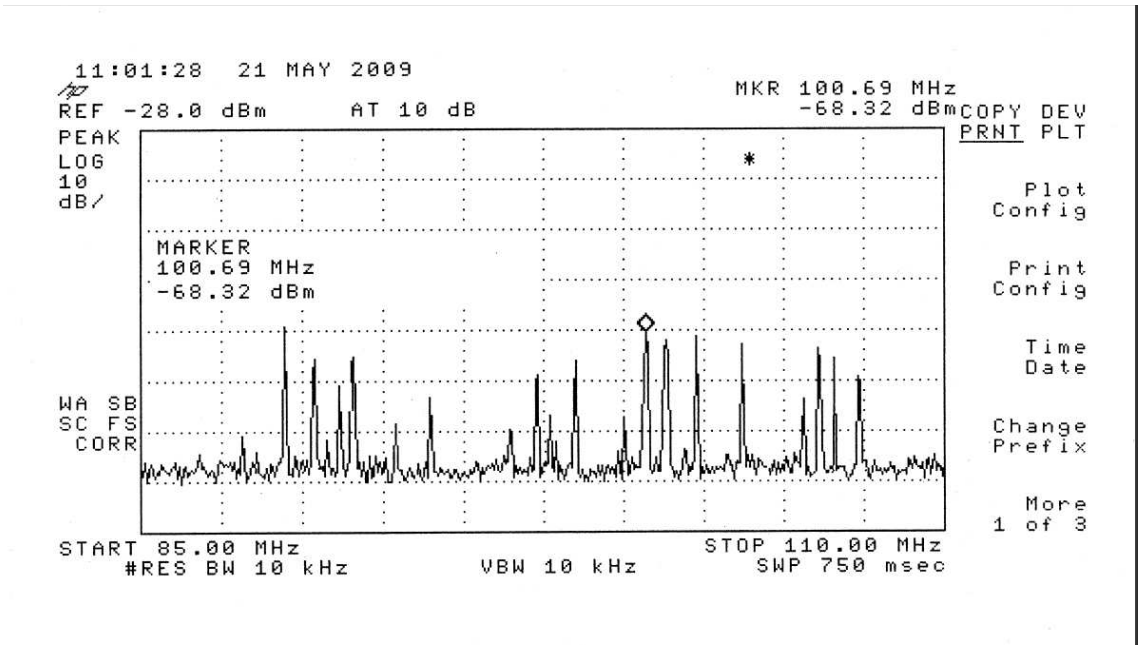
FIGURE 14.43 – Fonctions portes

Exercice 2 : Soit un signal sinusoïdal de 1 MHz échantillonné à 600 kHz. On effectue la FFT de ce signal sur 2000 points avec un oscilloscope numérique. Reproduisez l'affichage de cette FFT.

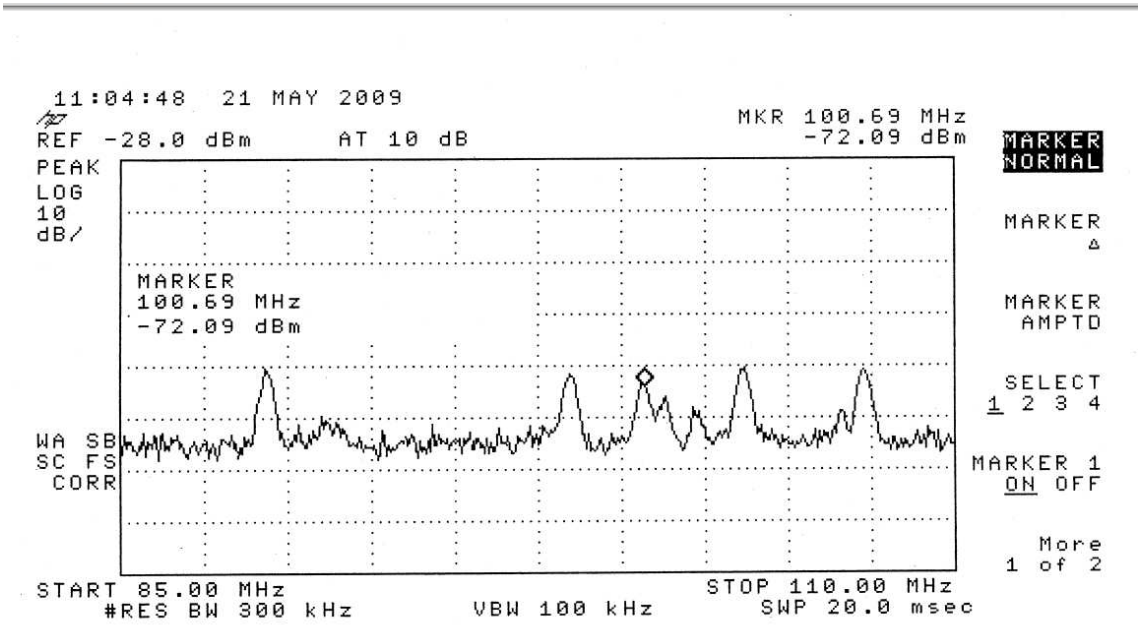
Problème (14 points) : Spectre de réception de la bande FM

La bande FM peut être explorée à l'ENIVL avec un dispositif de reception et de traitement du signal très sensible. Le spectre mesuré est présenté sur les figures (14.91-14.92) où l'on représente la densité spectrale de puissance $S_x(f)$ d'un signal $x(t)$ en fonction de la fréquence d'analyse f (en MHz), mesurée avec l'analyseur de spectre HP8590 utilisé lors des séances de Travaux Pratiques.

1. Sachant que la sensibilité en ordonnée est de 10 dB/division, identifier, par leur position en fréquence, et à l'aide de la figure 14.91(a) les raies dont la puissance est supérieure à -72 dBm. Pour info, la raie de puissance maximale (-68 dBm) est identifiée par un marqueur (petit losange)
2. La mesure de la puissance est effectuée à partir d'un filtrage du signal $x(t)$ comme présenté en Travaux Pratiques (Figure 14.93) dans une bande dont la résolution BW est indiquée sur les figures (14.91-14.92). Expliquer pourquoi le spectre de la figure 14.91(b) possède des raies plus larges que celles de la figure 14.91a
3. Rappeler le principe fondamental du Traitement du Signal permettant d'expliquer la différence de durée de mesure (appelée SWP)
4. Un agrandissement du spectre dans la bande [100.0 ;102.0] MHz est présenté en figure (14.92). En déduire une valeur précise de la fréquence porteuse des deux raies présentes sur ce spectre et émises par deux stations FM différentes.
5. La figure 14.92(b) présente le spectre $S_x(f)$ mesuré avec une résolution BW de 300 Hz. Évaluer la bande fréquentielle Δf de l'information contenue dans les deux porteuses
6. Préciser, en fonction de ces fréquences, leur nature physique (type d'ondes)
7. Indiquer approximativement, et au regard des deux raies, la station émettant l'information la plus puissante.

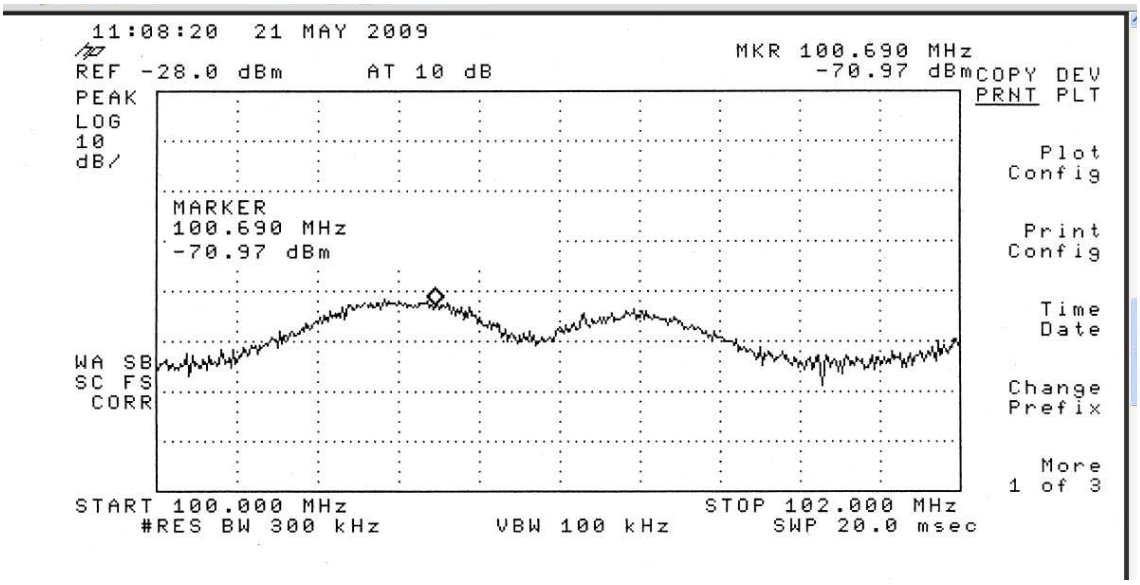


(a) BW= 10 kHz

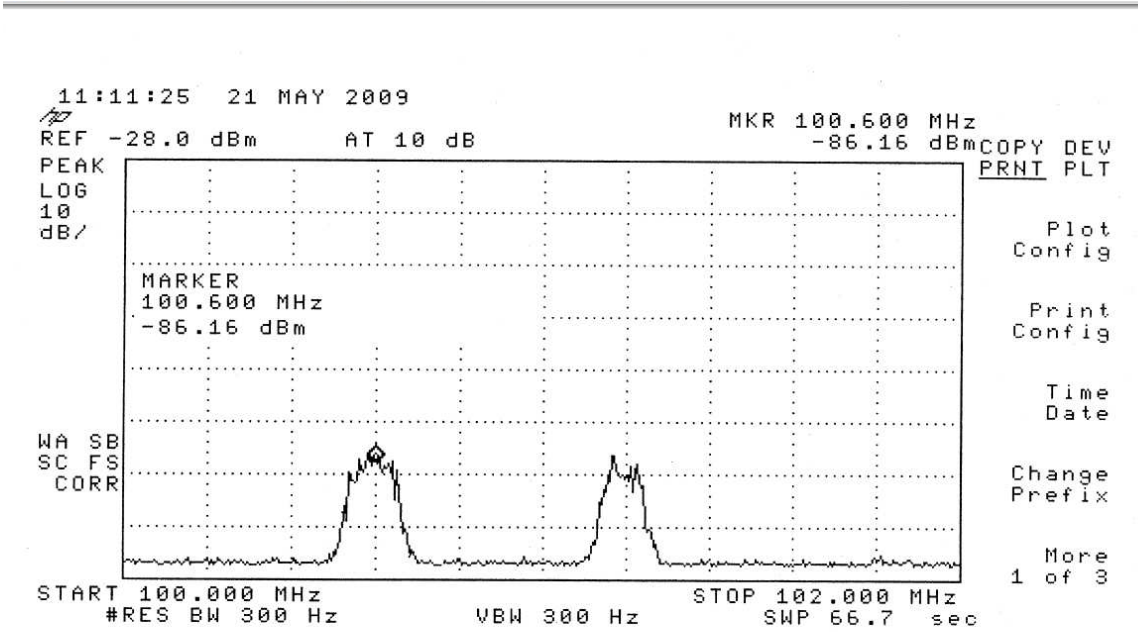


(b) BW= 300 kHz

FIGURE 14.44 – *Densité spectrale de puissance $S_x(f)$ d'un signal $x(t)$ mesurée dans la bande FM 85.0-110.0 MHz avec un analyseur de spectre HP8590*



(a) BW= 300 kHz



(b) BW= 300 Hz

FIGURE 14.45 – *Densité spectrale de puissance $S_x(f)$ d'un signal $x(t)$ mesurée dans la bande FM 100.0-102.0 MHz avec un analyseur de spectre HP8590*

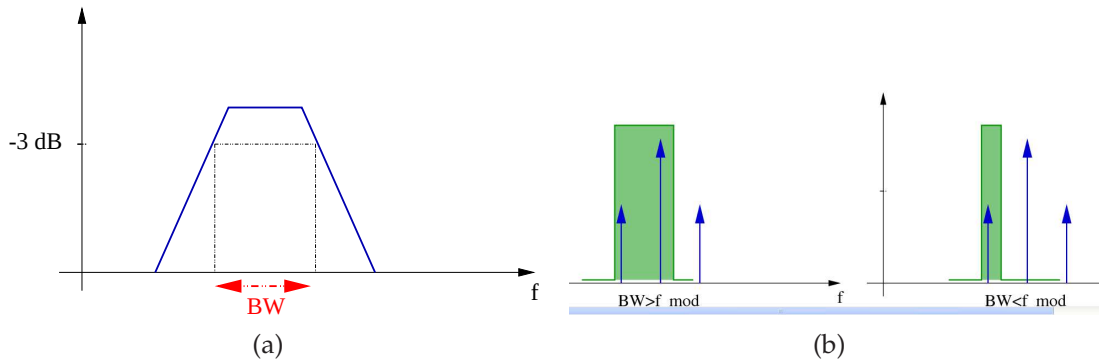


FIGURE 14.46 – *Réponse fréquentielle du filtre analogique définissant le paramètre BW de l'analyseur de spectre HP8590. Dans les analyseurs de spectre analogiques, la bande spectrale d'analyse BW correspond à la largeur du filtre passe bande sélectif centré autour de la fréquence d'analyse f_0 et permet la mesure de la puissance spectrale du signal*

Septembre 2010 (4ème Année ENIVL)

École Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire

Examen de Traitement du Signal (TS2)

Mardi 31 août 2010
Durée : 2 heures

- Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques
- Tout document autorisé
- calculatrice autorisée
- Les téléphones portables ne sont pas autorisés et devront être éteints
- Ce sujet comporte 2 pages

Questions de cours (6 points)

Exercice 1 : Tracer, pour le bruit blanc gaussien et le bruit blanc uniforme, les fonctions suivantes : densité spectrale de puissance, fonction d'autocorrélation, densité de probabilité

Exercice 2 : Soit un bruit blanc gaussien filtré ($f_{max} = 1MHz$) et de variance 4 $(mV)^2$. On veut réduire la puissance de ce bruit avec un filtre passe bas. Quelle doit être la fréquence de coupure de ce filtre pour avoir une variance de 2 $(mV)^2$

Problème (14 points) : Filtrage du bruit par moyennage

Soit le système décrit par la figure Fig.14.60. permettant d'analyser un signal $s(t)$. Le bruit $n(t)$ est supposé stationnaire, ergodique et non corrélé avec le signal $s(t)$. La réponse temporelle du filtre est notée $f(t)$.

1. Calculer la fonction de corrélation $\gamma_z(\tau)$ en fonction des corrélations $\gamma_s(\tau)$, $\gamma_y(\tau)$, $\gamma_{ys}(\tau)$ et $\gamma_{sy}(\tau)$

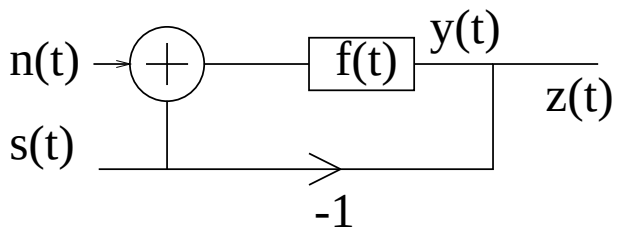


FIGURE 14.47 – Principe schématique du filtrage du signal $s(t)$

2. Exprimer $y(t)$ en fonction de $f(t)$, $n(t)$ et $s(t)$.
3. Exprimer la fonction de corrélation $\gamma_y(\tau)$ sous la forme d'un produit de convolution
4. Expliquer pourquoi on peut appliquer le théorème de Wiener-Kinchine au signal $y(t)$. Montrer que

$$S_y(\nu) = \left|F(\nu)\right|^2 (S_n(\nu) + S_s(\nu)) \tag{14.59}$$

$$S_{sy}(\nu) = F^*(\nu) S_s(\nu) \tag{14.60}$$

$$S_{ys}(\nu) = F(\nu) S_s(\nu) \tag{14.61}$$

5. En déduire que

$$S_z(\nu) = \left|F(\nu)\right|^2 S_n(\nu) + \left|F(\nu) - 1\right|^2 S_s(\nu). \tag{14.62}$$

6. Interpreter ce résultat lorsque $\nu \to 0$ dans le cas ou $F(\nu)$ est la réponse fréquentielle d'un filtre moyenneur dont la réponse impultionnelle est une porte

Janvier 2011 (4ème Année ENIVL)

École Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire

Examen de Traitement du Signal

Jeudi 27 janvier 2011
Durée : 2 heures

- Les exercices devront être rédigés sur des copies séparées
- Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques
- Document autorisé : 1 feuille A4 recto verso avec notes personnelles, formules et résultats (photocopie formellement interdite)
- Documents interdits : annales et correction de cet examen
- Les téléphones portables ne sont pas autorisés et devront être éteints
- Ce sujet comporte 4 pages dont 1 annexe

Exercice 1 (14 points) : Détection par autocorrélation d'un signal périodique noyé dans du bruit

Soit deux signaux réels $s(t)$ et $b(t)$ indépendants. Le signal $s(t) = s_0 \sin(2\pi f_0 t)$ est déterministe, sinusoïdal, de fréquence $f_0 = 1$ MHz. Le signal $b(t)$ est un bruit blanc stationnaire de densité spectrale de puissance $S_b(\nu) = N_0$ constante. On suppose que $s(t)$ et $b(t)$ sont à moyenne nulle.

À la sortie d'un capteur, nous disposons du signal $x(t) = s(t) + b(t)$, où l'amplitude du bruit est beaucoup plus élevée que celle du signal utile. Ce dernier se trouve donc noyé dans le bruit. L'objet

de cet exercice est l'étude d'une méthode permettant de mesurer les caractéristiques d'un signal utile noyé dans du bruit.

Aspect théorique

1. Rappeler l'expression de la fonction d'autocorrélation $\gamma_{ss}(\tau)$ du signal sinusoïdal $s(t)$, puis celle $\gamma_{bb}(\tau)$ du bruit $b(t)$
2. À partir de considération sur l'intercorrélation entre $s(t)$ et $b(t)$, déterminer la fonction d'autocorrélation $\gamma_{xx}(\tau)$ de $x(t)$
3. Représenter schématiquement $\gamma_{xx}(\tau)$ en fonction de τ

Aspect pratique

On veut faire une mesure pratique de $\gamma_{xx}(\tau)$. Pour cela, on dispose d'un oscilloscope numérique pour échantillonner le signal $x(t)$ à la fréquence $f_e = 20$ MHz et pour le mémoriser.

1. Compte-tenu du théorème d'échantillonnage de Shannon et de l'existence de la fréquence de Nyquist, déterminer la fréquence maximale f_m contenue dans le signal $x_e(t)$ échantillonné
2. En déduire alors la bande du signal de bruit échantillonné. Calculer la nouvelle fonction d'autocorrélation pour le bruit échantillonné
3. On souhaite mesurer précisément l'amplitude s_0 du signal $s(t)$ à partir de $\gamma_{xx}(\tau)$. Calculer l'instant τ_m à partir duquel l'amplitude de l'enveloppe de $\gamma_{bb}(\tau)$ est 1000 fois plus faible que l'amplitude de $\gamma_{ss}(\tau)$. On donne $s_0 = 1\mu$V et $N_0 = 1.7\ 10^{-10}$ V^2/Hz
4. Calculer le rapport $(\text{SNR})_{dB}$ du signal $x_e(t)$ numérisé

Rappel

Représentation temporelle	Représentation spectrale
Porte $x(t) = A\Pi_\tau(t)$	$X(\nu) = A\tau\frac{\sin(\pi\nu\tau)}{\pi\nu\tau}$

Exercice 2 (6 points) : Filtrage de signal aléatoire gaussien

Soit un signal aléatoire gaussien centré $x(t)$ de loi Normale $\mathcal{N}$ dont la densité spectrale de puissance unilatérale $S_x(f)$ est donnée par la figure Fig.14.109b. Cette densité spectrale possède un comportement basse fréquence de type $1/f$ qui commence à la fréquence f_2 (appelée "corner frequency") et s'étend jusqu'à f_1 liée à la durée totale d'acquisition du signal. Ce signal est échantillonné à l'aide

d'un échantillonneur de fréquence d'échantillonnage $f_s = 192$ kHz (f_s : frequency sampling). Afin d'éviter tout repliement de spectre, on place avant l'échantillonneur un filtre anti-repliement ; filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_3 = f_s/2$ (Fig.14.109a). Ce filtre permet de vérifier le critère de Shannon ($f_{max} = f_s/2$).

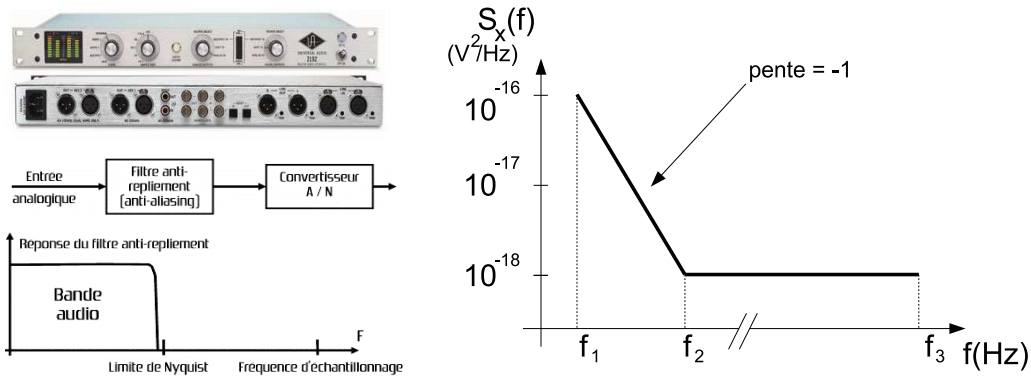


FIGURE 14.48 – *(a) échantillonneur Universal Audio 2192 Ultra-low noise 44.1kHz - 192kHz. (b)Densité spectrale unilatérale $S_x(f)$ du signal aléatoire $x(t)$*

1. Comment s'appelle le bruit dans l'intervalle $[f_2; f_3]$
2. Rappeler l'expression de la transformée de Fourier $X(\nu)$ d'un signal $x(t)$. Comment peut-on obtenir la valeur moyenne temporelle $\int x(t)dt$ à partir de $X(\nu)$?
3. Rappeler le lien entre $X(\nu)$ et $S_x(f)$
4. Calculer la fréquence de coupure basse fréquence que l'on peut avoir dans le spectre $S_x(f)$ du signal audio $x(t)$ enregistré sur $T_1 = 1$ heure. On supposera, dans ce cas, que cette valeur permet de fixer f_1
5. Déterminer la fréquence de coupure f_2 appelée "corner frequency" sachant que la densité spectrale de puissance $S_x(f)$ suit une loi en $1/f$: $S_x(f) = C/f$.
6. Calculer la puissance totale $\mathcal{P}_1$ du signal (en V^2). En déduire la probabilité pour que $x(t) > 40$nV

ANNEXE

Intégrale $\Pi(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;\,1)$

$$\Pi(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{et} \quad \Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Mai 2011 (3ème Année ENIVL)

École Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire

Examen de Traitement du Signal (TS1)

(Signaux Déterministes)

Mercredi 25 mai 2011

Durée : 2 heures

Les 2 parties sont indépendantes et devront être rédigées sur des copies séparées.

- Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques
- Document autorisé : 1 feuille A4 recto verso avec notes personnelles manuscrites (photocopie formellement interdite)
- La calculatrice est autorisée
- Documents interdits : annales et correction de cet examen
- Les téléphones portables ou tout autre smartphone ne sont pas autorisés et devront être éteints
- Ce sujet comporte 4 pages

Exercice 1 (8 points) : Propriétés spectrales de signaux

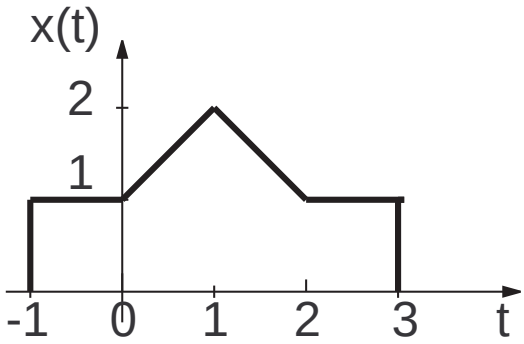


FIGURE 14.49 – Signal temporel

Soit le signal $x(t)$ représenté en Fig.14.101 et $X(\nu) = A(\nu) + jB(\nu)$ sa Transformée de Fourier (TF). Calculer ou justifier les quantités suivantes :

1. $X(0)$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)d\nu$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)e^{2i\pi\nu}d\nu$
4. $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 d\nu$
5. En utilisant les propriétés de symétries hermitiques (Tab.14.7), on se propose de donner l'allure de la TF inverse de $A(\nu)$. Dans un premier temps, calculer (ou rappeler) la TF de la fonction $x(-t)$ en fonction de $X(\nu)$. Dans un deuxième temps, exprimer $A(\nu)$ en fonction des TF de $x(t)$ et de $x(-t)$. Enfin, représenter graphiquement, en fonction du temps, l'allure de la TF inverse de $A(\nu)$

Fonction $x(t)$	Transformée de Fourier $X(\nu)$
réelle	complexe (partie réelle paire et partie imaginaire impaire)
réelle paire	réelle paire
réelle impaire	imaginaire impaire
imaginaire	complexe (partie réelle impaire, partie imaginaire paire)
imaginaire paire	imaginaire paire
imaginaire impaire	réelle impaire

TABLE 14.2 – *Symétries hermitiques et propriétés de la Transformée de Fourier*

Problème (12 points) : Signal RADAR

Le RADAR est un instrument destiné à déterminer la position d'une cible (avion) dans l'espace. Il comprend une antenne émettrice constituée par un paraboloïde de révolution alimenté par un cornet hyperfréquence placé en son foyer (Fig.14.63). L'onde émise $x(t)$ est une succession périodique d'impulsions de fréquence f_0, de durée τ et de période de répétition T. L'onde incidente se propage avec une célérité c =300000km/s dans l'espace libre en direction de la cible. Elle est réfléchie par celle-ci dans tout l'espace. Une partie du signal réfléchi est capté par l'antenne avant l'émission d'un nouveau train d'ondes. Le signal reçu par l'antenne est donc un signal semblable au signal incident, fortement atténué par le trajet aller-retour et retardé du temps de propagation correspondant t_d.

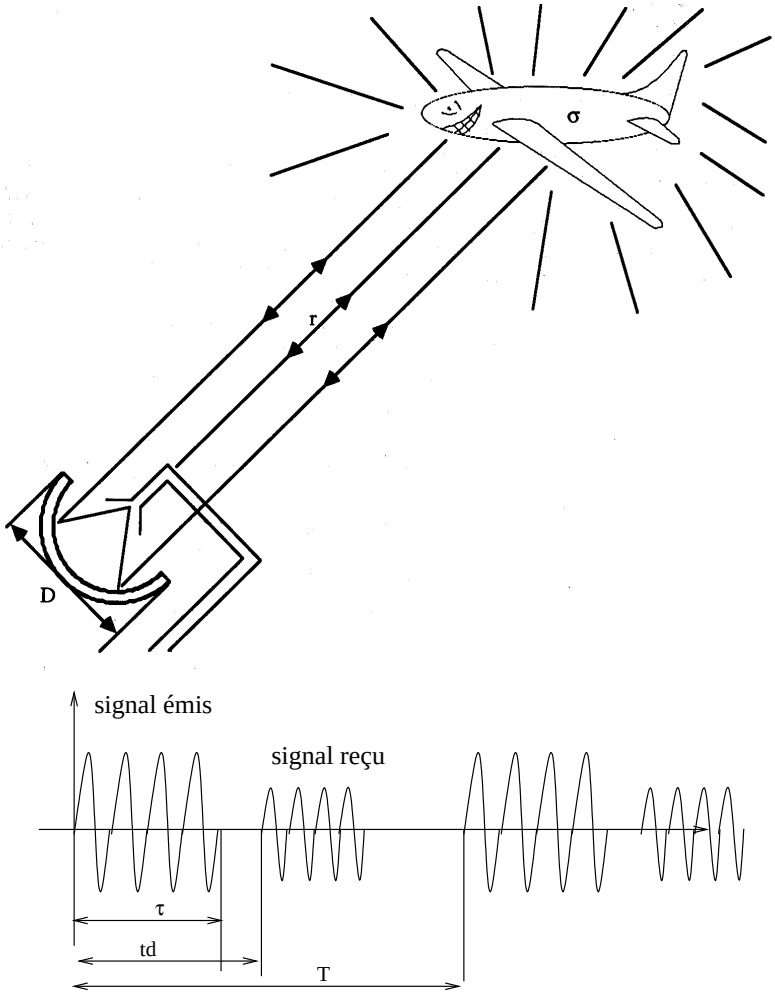


FIGURE 14.50 – Description du radar

Grandeurs temporelles caractéristiques du signal radar

Soit r la distance de l'avion à l'antenne.

1. Déterminer la relation entre le retard t_d et la distance r
2. Quelle doit être la durée maximale τ des impulsions pour mesurer une distance de 150 m (radar d'atterrissage)
3. Si on appelle P la portée du radar, quelle est la limite inférieure de la période de répétition T pour que la portée soit égale à 150 km
4. À l'aide de ces deux quantités temporelles, en déduire la bande spectrale minimale dans laquelle on doit concevoir ce radar pour répondre à cette application
5. Écrire un signal périodique en utilisant les distributions et notamment la fonction peigne de Dirac
6. En déduire une expression de $x(t)$ contenant la fonction peigne de Dirac, de la fonction porte et de la fonction $\cos(\omega_0 t)$

Propriétés spectrales du signal radar

1. Avant même de calculer la Transformée de Fourier du signal radar, quelles caractéristiques peut-on donner du spectre du signal
2. Montrer que le module du spectre $\left|X(\nu)\right|$ s'exprime par

$$\left|X(\nu)\right| = \frac{\tau}{T}\left[\frac{\sin \pi(\nu-\nu_0)\tau}{\pi(\nu-\nu_0)\tau}\sqcup\!\!\sqcup_{1/T}(\nu-\nu_0) + \frac{\sin \pi(\nu+\nu_0)\tau}{\pi(\nu+\nu_0)\tau}\sqcup\!\!\sqcup_{1/T}(\nu+\nu_0)\right] \tag{14.63}$$

3. Représenter schématiquement l'allure du spectre
4. Calculer l'occupation spectrale B du signal $x(t)$ est définie par la largeur de l'intervalle $[-\nu_1;\nu_1]$ où ν_1 est le premier zéro de la fonction sinus cardinal
5. Discuter l'influence de la durée τ de l'emission du signal sur l'amplitude des raies spectrales et sur l'occupation spectrale
6. Proposez une évolution technologique (évolution d'un paramètre physique) pour rendre ce radar plus efficace, plus rapide ou plus sensible

Représentation temporelle	Représentation spectrale
Porte $x(t) = A\Pi_\tau(t)$	$X(\nu) = A\tau\frac{\sin(\pi\nu\tau)}{\pi\nu\tau}$
Sinusoïde tronquée $x(t) = A\sin(2\pi\nu_0 t)\Pi_\tau(t)$	$X(\nu) = \frac{jA\tau}{2}\left[\frac{\sin(\pi(\nu+\nu_0)\tau)}{\pi(\nu+\nu_0)\tau} - \frac{\sin(\pi(\nu-\nu_0)\tau)}{\pi(\nu-\nu_0)\tau}\right]$

TABLE 14.3 – *Transformées de Fourier de fonctions et distributions usuelles*

Aout 2011 (3ème et 4ème Année ENIVL)

École Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire

Rattrapage de Traitement du Signal (TS1)

Lundi 29 août 2011
Durée : 1 heure

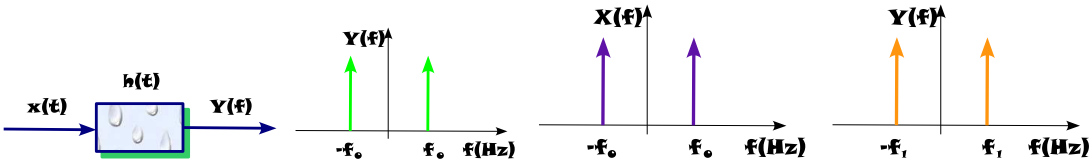
Aucun document autorisé - calculatrice non autorisée

Exercice 1 (7 points)

Soit un signal sinusoïdal de 1 MHz échantillonné à 700 kHz. On effectue la FFT de ce signal sur 4000 points avec un oscilloscope numérique. Reproduisez l'affichage de cette FFT. Attention à bien représenter les axes et leurs unités.

Exercice 2 (13 points)

1. Soit un système caractérisé par le schéma de la Figure 14.105(a). Rappeler le nom de la fonction $h(t)$. Lorsque $x(t) = \delta(t)$, on obtient la réponse $Y(f)$ donnée par la figure (a). Exprimer alors $H(f)$.
2. Calculer la convolution entre $x(t)$ et $y(t)$, sachant que $X(f)$ et $Y(f)$ sont représentées en Figure 14.105(b).



(a) Analyse des systèmes (b) Spectres

FIGURE 14.51 –

École Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire

Oral de Traitement du Signal (TS2)

Lundi 29 août 2011
Durée : 30 mn (dont 15 mn de préparation)
Aucun document autorisé - calculatrice non autorisée

Sujet 1

1. Représenter graphiquement les différentes propriétés du bruit blanc gaussien
   - densité spectrale de puissance
   - fonction d'autocorrélation
   - distribution statistique du bruit
   - représentation temporelle
2. Donner la correspondance entre ces 4 courbes

Sujet 2 :

Définir et commenter la notion de rapport signal sur bruit

Sujet 3 :

Décrire la notion de puissance d'un signal aléatoire

Sujet 4 :

Comparer représentation temporelle et spectrale d'un bruit

Sujet 5 :

Décrire les différences entre un signal déterministe et un signal aléatoire

Janvier 2010 (4ème Année ENIVL)

École Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire

Examen de Traitement du Signal

Lundi 25 janvier 2010
Durée : 2 heures

- Les exercices devront être rédigés sur des copies séparées
- Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques
- Document autorisé : 1 feuille A4 recto verso avec notes personnelles, formules et résultats (photocopie formellement interdite)
- Documents interdits : annales et correction de cet examen
- Les téléphones portables ne sont pas autorisés et devront être éteints
- Ce sujet comporte 5 pages dont 2 annexes

Exercice 1 : Bruit de l'amplificateur OPA378 (14 points)

Considérons un amplificateur opérationnel OPA378 nouvelle génération (octobre 2009) faible bruit dont les caractéristiques techniques sont données en Annexe 1. Cet amplificateur possède un bruit interne qui peut être modélisé (Fig.14.52) par deux sources aléatoires de tension e_n et de courant i_n. Dans l'annexe, les densités spectrales sont exprimées en nV/$\sqrt{Hz}$ et en fA/$\sqrt{Hz}$ (rappel : 1 fA=10^{-15}A). L'objectif de cette étude est de calculer la puissance de la tension de bruit de sortie de l'amplificateur.

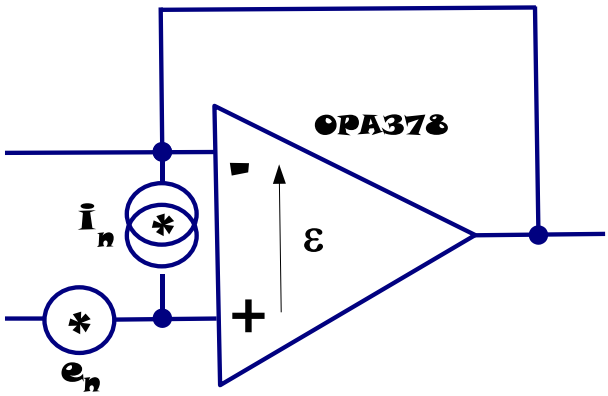


FIGURE 14.52 – *Amplificateur OPA378 bruité en montage suiveur*

1. Rappeler les expressions de la puissance d'un signal aléatoire dans le domaine temporel et dans le domaine spectral
2. Donner les unités de la densité spectrale de puissance de bruit dans le cas où le signal aléatoire est une tension (exprimée en Volts) et un courant (exprimé en Ampères)
3. Calculer la puissance dans le domaine spectral du bruit de tension e_n dans la bande [1,10]Hz
4. Calculer la puissance dans le domaine spectral du bruit de courant i_n dans la bande [1,10]Hz
5. Lorsqu'il est utilisé en montage suiveur, l'OPA378 délivre un bruit de sortie e_s donné par

$$e_s = e_n + R_e i_n, \tag{14.64}$$

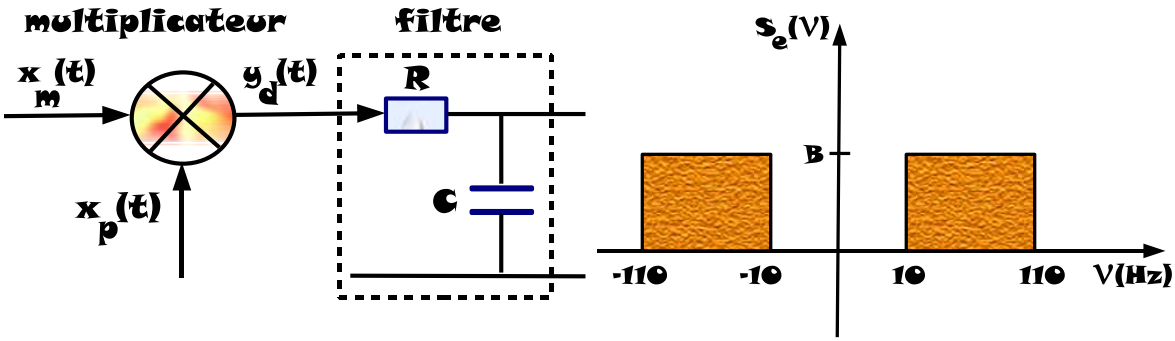
   où R_e est la résistance d'entrée de l'OPA378. En supposant les deux sources de bruit i_n et e_n non corrélées, montrer que la puissance du bruit e_s (dans le domaine temporel) est donné par

$$e_s^2 = e_n^2 + R_e^2 i_n^2. \tag{14.65}$$

6. Calculer la puissance du bruit dans le cas $R_e = 10\text{k}\Omega$
7. En supposant la distribution gaussienne du bruit (Annexe 2), calculer la probabilité pour que la tension du bruit dépasse 80 nV. Comparez cette valeur avec la figure 1 de l'Annexe 1

Exercice 2 : Bruit dans un multiplicateur (6 points)

Une tension $U(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$ d'amplitude $A = 1$V et de fréquence $f_0 = 30$Hz est noyée dans un bruit $e(t)$ d'amplitude quadratique moyenne $\sqrt{< e^2(t) >} = \sigma_e$=2V et supposé blanc entre 10Hz et 110Hz. On supposera que sa densité spectrale de puissance $S_e(\nu)$ est nulle en dehors de cette bande (Fig.14.53b).



(a) (b)

FIGURE 14.53 – *(a) Système étudié. (b) Spectre du bruit $e(t)$ supposé blanc dans la bande [10-110]Hz*

1. Calculer la valeur B de la densité spectrale de puissance (exprimée en V^2/Hz)
2. La tension bruitée $x_m(t) = U(t) + e(t)$ est appliquée à l'entrée d'un multiplicateur délivrant une sortie $y_d(t) = x_m(t)x_p(t)$ où $x_p(t) = 2A\cos(2\pi f_0 t)$ est une tension synchrone (en phase) non bruitée. Exprimer $y_d(t)$ en fonction de A, f_0 et $b(t)$
3. En déduire que le spectre $Y_d(\nu)$ s'écrit :

$$Y_d(\nu) = A^2\delta(\nu) + \frac{A^2}{2}\left[\delta(\nu - 2f_0) + \delta(\nu + 2f_0)\right] + A\left[S_e(\nu - f_0) + S_e(\nu + f_0)\right] \tag{14.66}$$

4. Représenter graphiquement $Y_d(\nu)$
5. La sortie $y_d(t)$ est ensuite filtrée par un système passe bas (supposé idéal) de fréquence de coupure $f_c = 20$Hz. Calculer la puissance du bruit $e_1(t)$ en sortie du filtre et son écart-type σ_{e_1} (en Volts)
6. Représenter graphiquement $Y_{e_1}(\nu)$, le spectre du bruit filtré

ANNEXE 1

TYPICAL CHARACTERISTICS

At T_A = +25°C, R_L = 10kΩ, V_S = +5.5V and V_{OUT} = V_S/2, unless otherwise noted.

0.1Hz TO 10Hz NOISE

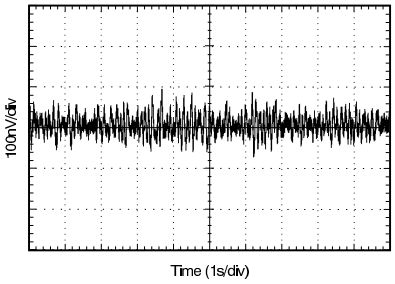


Figure 1.

INPUT CURRENT AND VOLTAGE NOISE SPECTRAL DENSITY vs FREQUENCY

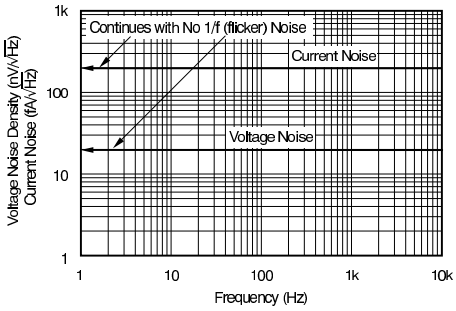


Figure 2.

OFFSET VOLTAGE PRODUCTION DISTRIBUTION

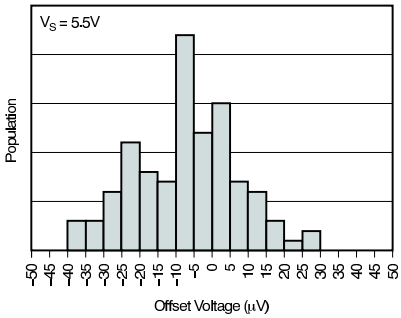


Figure 3.

OFFSET VOLTAGE DRIFT DISTRIBUTION

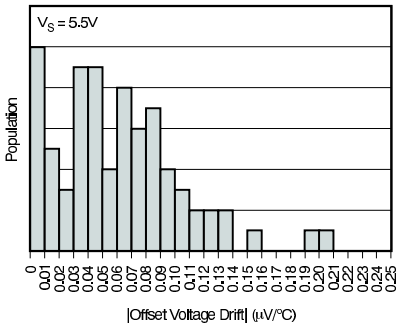


Figure 4.

Copyright © 2008–2009, Texas Instruments Incorporated

ANNEXE 2

Intégrale $\Pi(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;1)$

$$\Pi(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{et} \quad \Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Juin 2010 (3ème Année ENIVL)

École Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire

Examen de Traitement du Signal (TS1)

Jeudi 3 juin 2010
Durée : 2 heures

Les 3 parties sont indépendantes et devront être rédigées sur des copies séparées.

- Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques
- Document autorisé : 1 feuille A4 recto verso avec notes personnelles manuscrites (photocopie formellement interdite)
- calculatrice autorisée
- Documents interdits : annales et correction de cet examen
- Les téléphones portables ne sont pas autorisés et devront être éteints
- Ce sujet comporte 3 pages

Questions de cours (4 points)

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $p(t) = A\cos(2\pi f_p t)$
2. Rappeler la définition précise de la convolution entre les deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$
3. Calculer $\int f(u)\delta(y - y_0 - u)du$. Rappel : $\int f(u)\delta(u)du = f(u = 0)$
4. Soit $\{x_n\}$ un signal numérique ayant été échantillonné à 2 kHz. Le calcul de la FFT de ce signal indique une raie à 400 Hz. En déduire la fréquence du signal sachant que celle-ci est comprise entre 1kHz et 2 kHz

Exercice 1 (8 points) : Identification de raies spectrales

Soit les deux fonctions réelles $f(\nu)$ et $g(\nu)$ dont on veut déterminer la convolution $y(\nu) = f(\nu) * g(\nu)$ (Fig.14.54). On se propose de décomposer $f(\nu)$ en une somme de deux portes $\Pi^{(i)}_{\Delta\nu}(\nu)$, $i = 1;2$, et d'utiliser les propriétés de linéarité de l'opération de convolution de façon à évaluer $y(\nu) = y^{(1)}(\nu) + y^{(2)}(\nu)$.

1. On se place dans le cas $\nu_0 = 1$. Pour chaque porte $\Pi^{(i)}_{\Delta\nu}(\nu)$ du signal $f(\nu)$:
   - déterminer intervalle de fréquence $\mathcal{D}^{(i)}$ sur lequel la valeur de $y^{(i)}(\nu)$ est non nulle
   - déterminer la ou les fréquence(s) où $y^{(i)}(\nu)$ atteint son maximum
   - Calculer $y^{(i)}(\nu)$ et donner son l'allure graphique
2. Représenter, en justifiant, $y(\nu)$ pour $\nu_0 = 0.5$
3. En déduire la valeur minimale permettant de séparer les deux réponses $y^{(i)}(\nu)$, soit $\mathcal{D}^{(1)} \bigcap \mathcal{D}^{(2)} = \emptyset$
4. En conclure sur une application concrète de ce calcul pour l'analyse spectrale

Rappel :

$$\Pi_L(x) * \Pi_L(x) = \Lambda_{2L}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{L} & \text{si} \quad 0 < x < L \\ 1 + \frac{x}{L} & \text{si} \quad -L < x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{14.67}$$

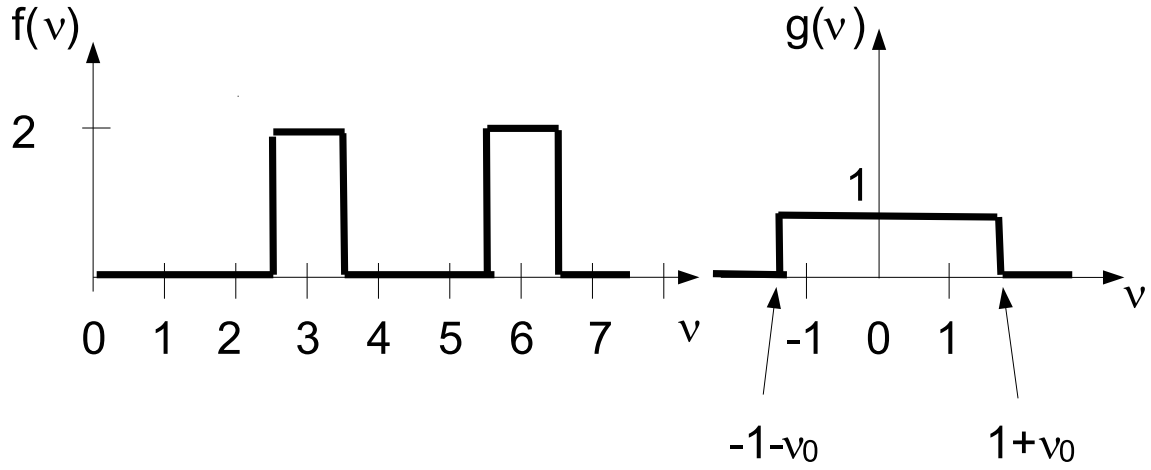


FIGURE 14.54 – Convolution de deux fonctions pour identification de raies spectrales

Exercice 2 (8 points) : Codage audio par sous-échantillonnage

Un signal audio $s_1(t)$ est filtré de façon à ne posséder aucune composante spectrale au delà de 2 kHz. On désire le coder par un cryptage secret pour pouvoir sécuriser un système de transmission

vocal. Pour cela, on utilise un processus de modulation classique (Fig.14.55a) : le signal $s_1(t)$ est utilisé pour moduler en amplitude une porteuse sinusoïdale $p(t) = A\cos(2\pi f_p t)$ de fréquence $f_p = 16$ kHz grâce à un modulateur en anneau. Le modulateur en anneau effectue une opération de multiplication entre les deux signaux $s_1(t)$ et $p(t)$. Le signal obtenu $z(t)$ est ensuite échantillonné à une fréquence d'échantillonnage f_e. Enfin, ce signal échantillonné $z_e(t)$ est filtré par un filtre passe bas idéal de fréquence de coupure $f_c = 2$ kHz.

1. Après avoir exprimé $z(t)$ en fonction de $s_1(t)$ et $p(t)$, calculer et représenter le module du spectre $Z(\nu)$, où $Z(\nu)$ est la transformée de Fourier de $z(t)$.
2. Tracer le spectre $Z_e(\nu)$ du signal échantillonné $z_e(t)$ avec $f_e = 25$ kHz, dans la bande [-40 kHz, +40 kHz]. Expliquer le phénomène observé en justifiant la cause
3. Quelle est la valeur qu'il faut donner à f_e pour que le spectre du signal crypté $Z_c(\nu)$ soit le résultat du renversement du spectre $S_1(\nu)$ suivant l'axe des fréquences (Fig.14.55b)
4. Représenter, dans ce cas et dans la bande [-5 kHz,+5 kHz], l'allure du spectre $Z_e(\nu)$ à la sortie de l'échantillonneur avant le filtrage
5. Comment, à partir du signal transmis, reconstituer le signal initial (décryptage) ?

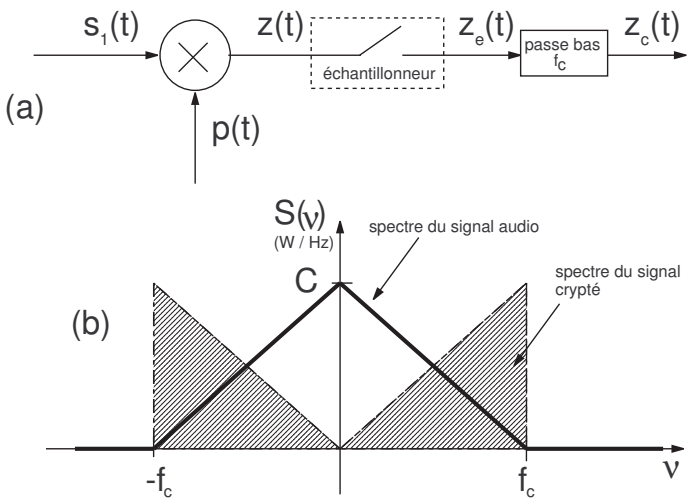


FIGURE 14.55 – (a) : Principe du cryptage d'un signal audio avec un modulateur en anneau. (b) Spectre du signal audio $s_1(t)$ et du signal crypté $z_c(t)$

Septembre 2010 (3ème Année ENIVL)

École Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire

Examen de Traitement du Signal (TS1)

Mardi 31 août 2010
Durée : 2 heures

- Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques
- Document autorisé : 1 feuille A4 recto verso avec notes personnelles manuscrites (photocopie formellement interdite)
- Calculatrice autorisée
- Documents interdits : annales et correction de cet examen
- Les téléphones portables ne sont pas autorisés et devront être éteints
- Ce sujet comporte 5 pages

Questions de cours (6 points)

Exercice 1 : Calculer et représenter graphiquement le produit de convolution des deux fonctions présentées en Fig.14.103

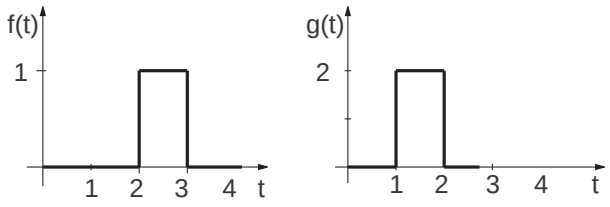


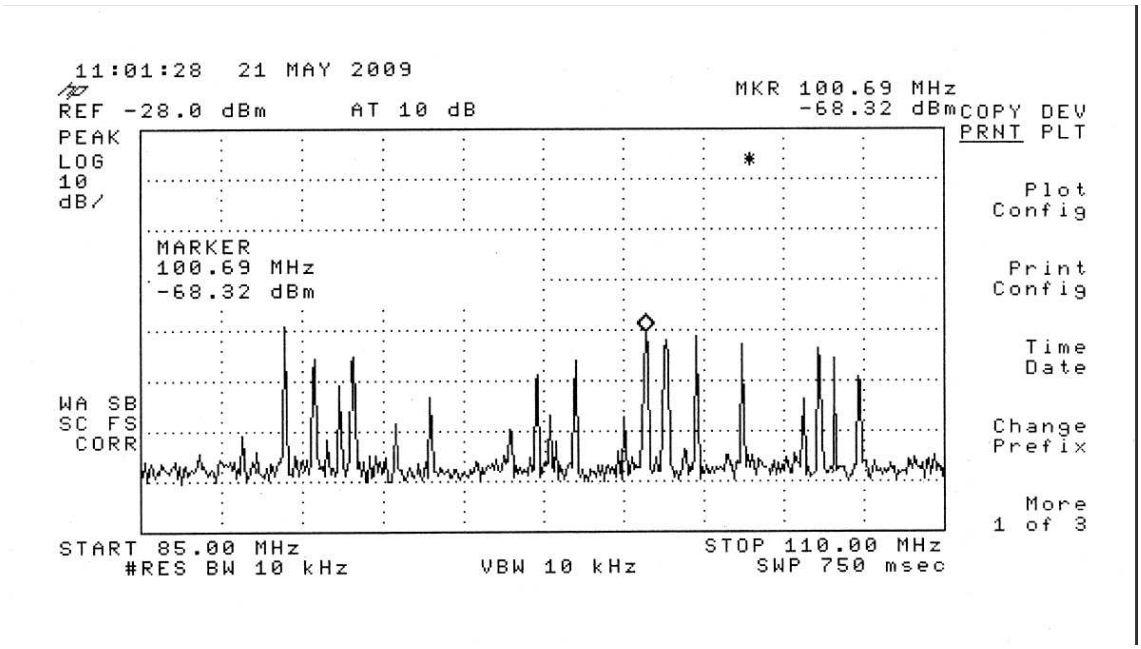
FIGURE 14.56 – Fonctions portes

Exercice 2 : Soit un signal sinusoïdal de 1 MHz échantillonné à 600 kHz. On effectue la FFT de ce signal sur 2000 points avec un oscilloscope numérique. Reproduisez l'affichage de cette FFT.

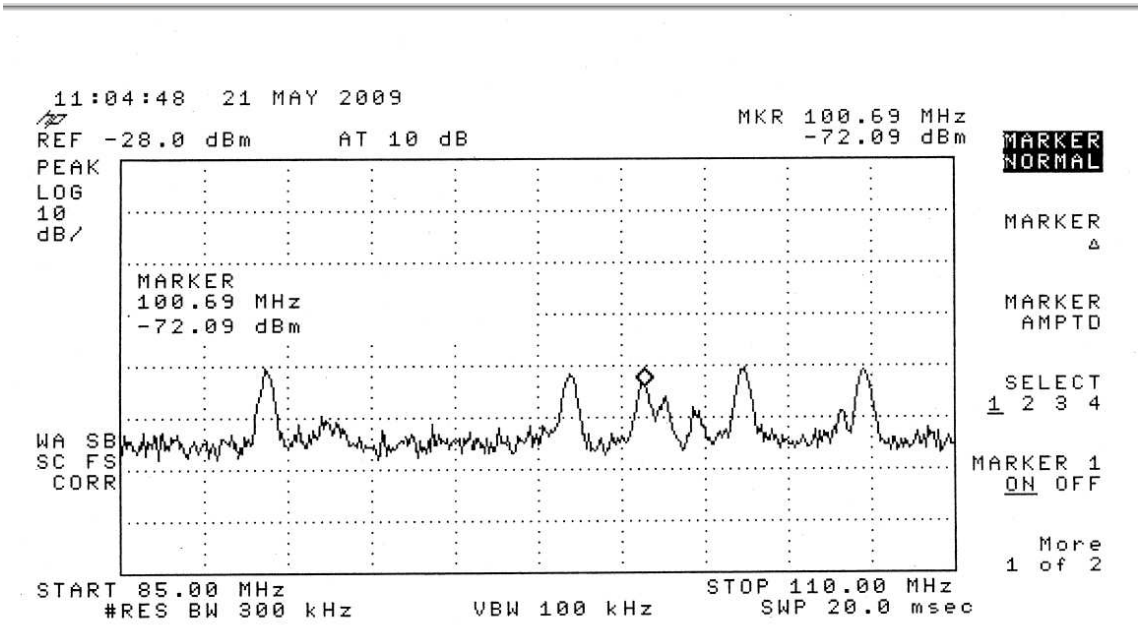
Problème (14 points) : Spectre de réception de la bande FM

La bande FM peut être explorée à l'ENIVL avec un dispositif de reception et de traitement du signal très sensible. Le spectre mesuré est présenté sur les figures (14.91-14.92) où l'on représente la densité spectrale de puissance $S_x(f)$ d'un signal $x(t)$ en fonction de la fréquence d'analyse f (en MHz), mesurée avec l'analyseur de spectre HP8590 utilisé lors des séances de Travaux Pratiques.

1. Sachant que la sensibilité en ordonnée est de 10 dB/division, identifier, par leur position en fréquence, et à l'aide de la figure 14.91(a) les raies dont la puissance est supérieure à -72 dBm. Pour info, la raie de puissance maximale (-68 dBm) est identifiée par un marqueur (petit losange)
2. La mesure de la puissance est effectuée à partir d'un filtrage du signal $x(t)$ comme présenté en Travaux Pratiques (Figure 14.93) dans une bande dont la résolution BW est indiquée sur les figures (14.91-14.92). Expliquer pourquoi le spectre de la figure 14.91(b) possède des raies plus larges que celles de la figure 14.91a
3. Rappeler le principe fondamental du Traitement du Signal permettant d'expliquer la différence de durée de mesure (appelée SWP)
4. Un agrandissement du spectre dans la bande [100.0 ;102.0] MHz est présenté en figure (14.92). En déduire une valeur précise de la fréquence porteuse des deux raies présentes sur ce spectre et émises par deux stations FM différentes.
5. La figure 14.92(b) présente le spectre $S_x(f)$ mesuré avec une résolution BW de 300 Hz. Évaluer la bande fréquentielle Δf de l'information contenue dans les deux porteuses
6. Préciser, en fonction de ces fréquences, leur nature physique (type d'ondes)
7. Indiquer approximativement, et au regard des deux raies, la station émettant l'information la plus puissante.

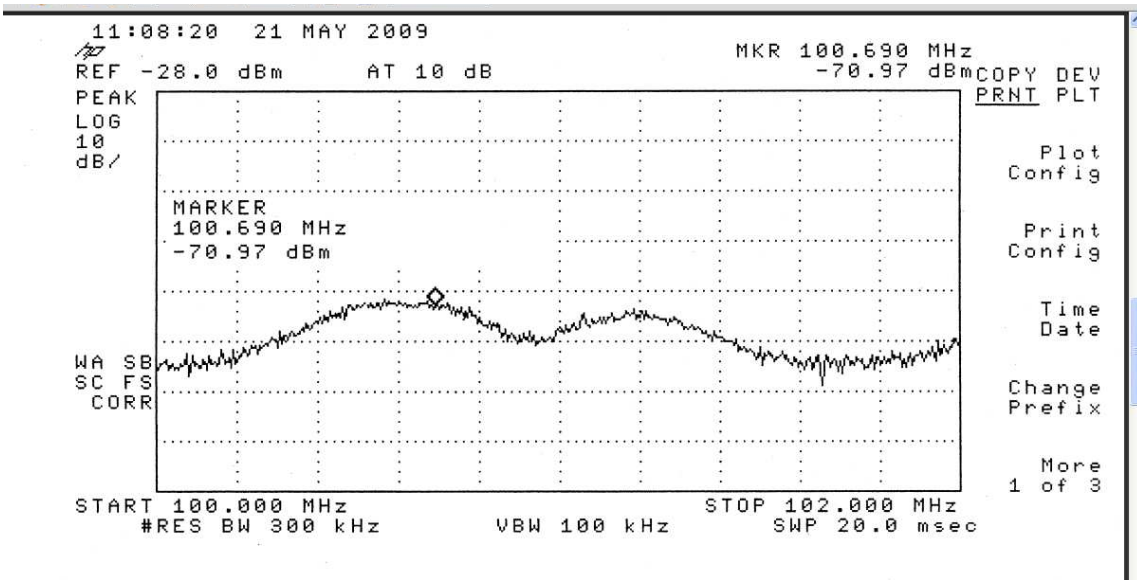


(a) BW= 10 kHz

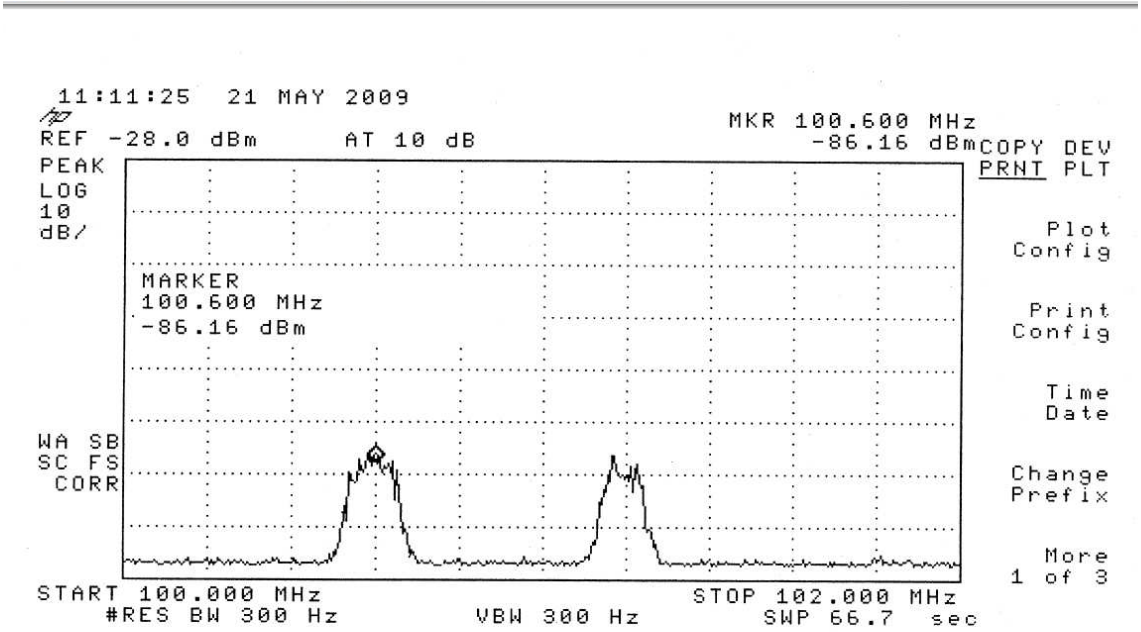


(b) BW= 300 kHz

FIGURE 14.57 – *Densité spectrale de puissance $S_x(f)$ d'un signal $x(t)$ mesurée dans la bande FM 85.0-110.0 MHz avec un analyseur de spectre HP8590*



(a) BW= 300 kHz



(b) BW= 300 Hz

FIGURE 14.58 – *Densité spectrale de puissance $S_x(f)$ d'un signal $x(t)$ mesurée dans la bande FM 100.0-102.0 MHz avec un analyseur de spectre HP8590*

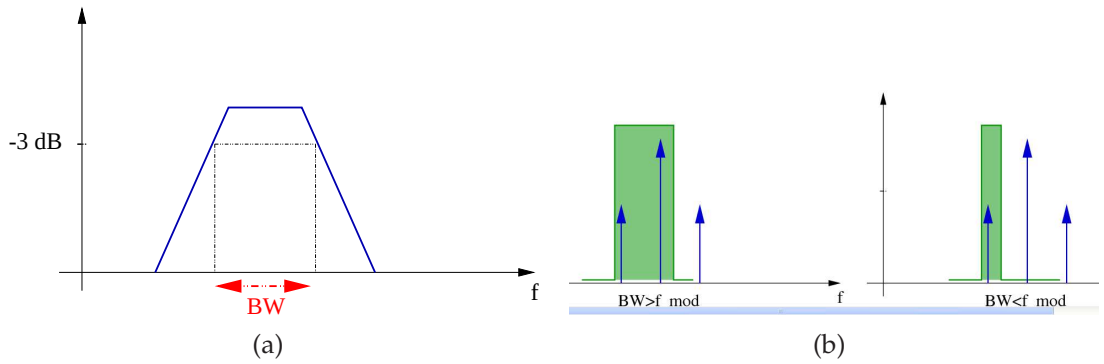


FIGURE 14.59 – *Réponse fréquentielle du filtre analogique définissant le paramètre BW de l'analyseur de spectre HP8590. Dans les analyseurs de spectre analogiques, la bande spectrale d'analyse BW correspond à la largeur du filtre passe bande sélectif centré autour de la fréquence d'analyse f_0 et permet la mesure de la puissance spectrale du signal*

Septembre 2010 (4ème Année ENIVL)

École Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire

Examen de Traitement du Signal (TS2)

Mardi 31 août 2010
Durée : 2 heures

- Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques
- Tout document autorisé
- calculatrice autorisée
- Les téléphones portables ne sont pas autorisés et devront être éteints
- Ce sujet comporte 2 pages

Questions de cours (6 points)

Exercice 1 : Tracer, pour le bruit blanc gaussien et le bruit blanc uniforme, les fonctions suivantes : densité spectrale de puissance, fonction d'autocorrélation, densité de probabilité

Exercice 2 : Soit un bruit blanc gaussien filtré ($f_{max} = 1MHz$) et de variance 4 $(mV)^2$. On veut réduire la puissance de ce bruit avec un filtre passe bas. Quelle doit être la fréquence de coupure de ce filtre pour avoir une variance de 2 $(mV)^2$

Problème (14 points) : Filtrage du bruit par moyennage

Soit le système décrit par la figure Fig.14.60. permettant d'analyser un signal $s(t)$. Le bruit $n(t)$ est supposé stationnaire, ergodique et non corrélé avec le signal $s(t)$. La réponse temporelle du filtre est notée $f(t)$.

1. Calculer la fonction de corrélation $\gamma_z(\tau)$ en fonction des corrélations $\gamma_s(\tau)$, $\gamma_y(\tau)$, $\gamma_{ys}(\tau)$ et $\gamma_{sy}(\tau)$

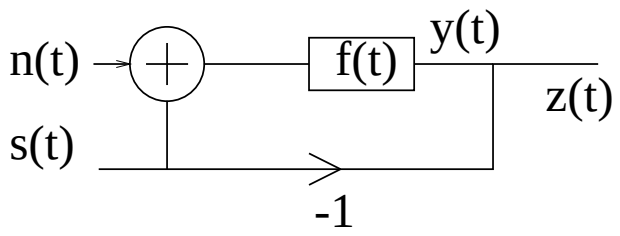


FIGURE 14.60 – Principe schématique du filtrage du signal $s(t)$

2. Exprimer $y(t)$ en fonction de $f(t)$, $n(t)$ et $s(t)$.
3. Exprimer la fonction de corrélation $\gamma_y(\tau)$ sous la forme d'un produit de convolution
4. Expliquer pourquoi on peut appliquer le théorème de Wiener-Kinchine au signal $y(t)$. Montrer que

$$S_y(\nu) = \left|F(\nu)\right|^2 (S_n(\nu) + S_s(\nu)) \tag{14.68}$$

$$S_{sy}(\nu) = F^*(\nu) S_s(\nu) \tag{14.69}$$

$$S_{ys}(\nu) = F(\nu) S_s(\nu) \tag{14.70}$$

5. En déduire que

$$S_z(\nu) = \left|F(\nu)\right|^2 S_n(\nu) + \left|F(\nu) - 1\right|^2 S_s(\nu). \tag{14.71}$$

6. Interpreter ce résultat lorsque $\nu \to 0$ dans le cas ou $F(\nu)$ est la réponse fréquentielle d'un filtre moyenneur dont la réponse impultionnelle est une porte

Janvier 2011 (4ème Année ENIVL)

École Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire

Examen de Traitement du Signal

Jeudi 27 janvier 2011
Durée : 2 heures

- Les exercices devront être rédigés sur des copies séparées
- Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques
- Document autorisé : 1 feuille A4 recto verso avec notes personnelles, formules et résultats (photocopie formellement interdite)
- Documents interdits : annales et correction de cet examen
- Les téléphones portables ne sont pas autorisés et devront être éteints
- Ce sujet comporte 4 pages dont 1 annexe

Exercice 1 (14 points) : Détection par autocorrélation d'un signal périodique noyé dans du bruit

Soit deux signaux réels $s(t)$ et $b(t)$ indépendants. Le signal $s(t) = s_0 \sin(2\pi f_0 t)$ est déterministe, sinusoïdal, de fréquence $f_0 = 1$ MHz. Le signal $b(t)$ est un bruit blanc stationnaire de densité spectrale de puissance $S_b(\nu) = N_0$ constante. On suppose que $s(t)$ et $b(t)$ sont à moyenne nulle.

À la sortie d'un capteur, nous disposons du signal $x(t) = s(t) + b(t)$, où l'amplitude du bruit est beaucoup plus élevée que celle du signal utile. Ce dernier se trouve donc noyé dans le bruit. L'objet

de cet exercice est l'étude d'une méthode permettant de mesurer les caractéristiques d'un signal utile noyé dans du bruit.

Aspect théorique

1. Rappeler l'expression de la fonction d'autocorrélation $\gamma_{ss}(\tau)$ du signal sinusoïdal $s(t)$, puis celle $\gamma_{bb}(\tau)$ du bruit $b(t)$
2. À partir de considération sur l'intercorrélation entre $s(t)$ et $b(t)$, déterminer la fonction d'autocorrélation $\gamma_{xx}(\tau)$ de $x(t)$
3. Représenter schématiquement $\gamma_{xx}(\tau)$ en fonction de τ

Aspect pratique

On veut faire une mesure pratique de $\gamma_{xx}(\tau)$. Pour cela, on dispose d'un oscilloscope numérique pour échantillonner le signal $x(t)$ à la fréquence $f_e = 20$ MHz et pour le mémoriser.

1. Compte-tenu du théorème d'échantillonnage de Shannon et de l'existence de la fréquence de Nyquist, déterminer la fréquence maximale f_m contenue dans le signal $x_e(t)$ échantillonné
2. En déduire alors la bande du signal de bruit échantillonné. Calculer la nouvelle fonction d'autocorrélation pour le bruit échantillonné
3. On souhaite mesurer précisément l'amplitude s_0 du signal $s(t)$ à partir de $\gamma_{xx}(\tau)$. Calculer l'instant τ_m à partir duquel l'amplitude de l'enveloppe de $\gamma_{bb}(\tau)$ est 1000 fois plus faible que l'amplitude de $\gamma_{ss}(\tau)$. On donne $s_0 = 1\mu$V et $N_0 = 1.7\ 10^{-10}$ V^2/Hz
4. Calculer le rapport (SNR)$_{dB}$ du signal $x_e(t)$ numérisé

Rappel

Représentation temporelle	Représentation spectrale
Porte $x(t) = A\Pi_\tau(t)$	$X(\nu) = A\tau\frac{\sin(\pi\nu\tau)}{\pi\nu\tau}$

Exercice 2 (6 points) : Filtrage de signal aléatoire gaussien

Soit un signal aléatoire gaussien centré $x(t)$ de loi Normale $\mathcal{N}$ dont la densité spectrale de puissance unilatérale $S_x(f)$ est donnée par la figure Fig.14.109b. Cette densité spectrale possède un comportement basse fréquence de type $1/f$ qui commence à la fréquence f_2 (appelée "corner frequency") et s'étend jusqu'à f_1 liée à la durée totale d'acquisition du signal. Ce signal est échantillonné à l'aide

d'un échantillonneur de fréquence d'échantillonnage $f_s = 192$ kHz (f_s : frequency sampling). Afin d'éviter tout repliement de spectre, on place avant l'échantillonneur un filtre anti-repliement ; filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_3 = f_s/2$ (Fig.14.109a). Ce filtre permet de vérifier le critère de Shannon ($f_{max} = f_s/2$).

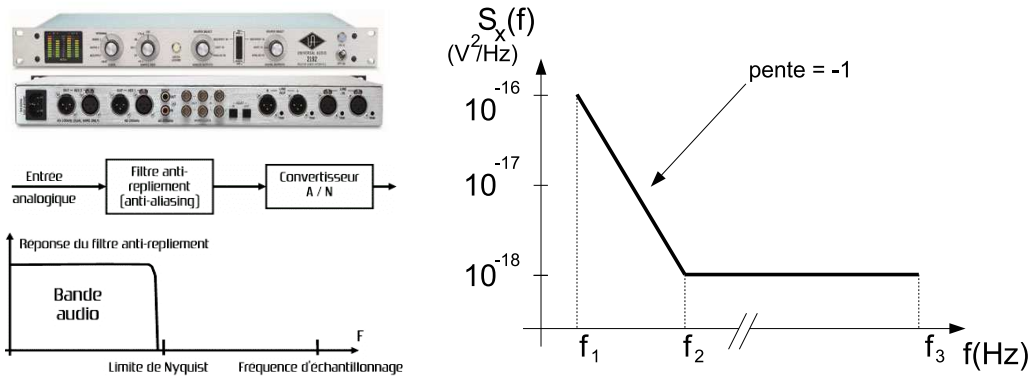


FIGURE 14.61 – *(a) échantillonneur Universal Audio 2192 Ultra-low noise 44.1kHz - 192kHz. (b)Densité spectrale unilatérale $S_x(f)$ du signal aléatoire $x(t)$*

1. Comment s'appelle le bruit dans l'intervalle $[f_2; f_3]$
2. Rappeler l'expression de la transformée de Fourier $X(\nu)$ d'un signal $x(t)$. Comment peut-on obtenir la valeur moyenne temporelle $\int x(t)dt$ à partir de $X(\nu)$?
3. Rappeler le lien entre $X(\nu)$ et $S_x(f)$
4. Calculer la fréquence de coupure basse fréquence que l'on peut avoir dans le spectre $S_x(f)$ du signal audio $x(t)$ enregistré sur $T_1 = 1$ heure. On supposera, dans ce cas, que cette valeur permet de fixer f_1
5. Déterminer la fréquence de coupure f_2 appelée "corner frequency" sachant que la densité spectrale de puissance $S_x(f)$ suit une loi en $1/f$: $S_x(f) = C/f$.
6. Calculer la puissance totale $\mathcal{P}_1$ du signal (en V^2). En déduire la probabilité pour que $x(t) > 40$nV

ANNEXE

Intégrale $\Pi(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;\,1)$

$$\Pi(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{et} \quad \Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Mai 2011 (3ème Année ENIVL)

École Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire

Examen de Traitement du Signal (TS1)

(Signaux Déterministes)

Mercredi 25 mai 2011

Durée : 2 heures

Les 2 parties sont indépendantes et devront être rédigées sur des copies séparées.

- Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques
- Document autorisé : 1 feuille A4 recto verso avec notes personnelles manuscrites (photocopie formellement interdite)
- La calculatrice est autorisée
- Documents interdits : annales et correction de cet examen
- Les téléphones portables ou tout autre smartphone ne sont pas autorisés et devront être éteints
- Ce sujet comporte 4 pages

Exercice 1 (8 points) : Propriétés spectrales de signaux

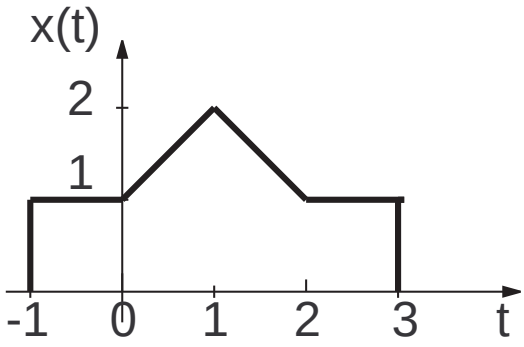


FIGURE 14.62 – Signal temporel

Soit le signal $x(t)$ représenté en Fig.14.101 et $X(\nu) = A(\nu) + jB(\nu)$ sa Transformée de Fourier (TF). Calculer ou justifier les quantités suivantes :

1. $X(0)$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)d\nu$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)e^{2i\pi\nu}d\nu$
4. $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 d\nu$
5. En utilisant les propriétés de symétries hermitiques (Tab.14.7), on se propose de donner l'allure de la TF inverse de $A(\nu)$. Dans un premier temps, calculer (ou rappeler) la TF de la fonction $x(-t)$ en fonction de $X(\nu)$. Dans un deuxième temps, exprimer $A(\nu)$ en fonction des TF de $x(t)$ et de $x(-t)$. Enfin, représenter graphiquement, en fonction du temps, l'allure de la TF inverse de $A(\nu)$

Fonction $x(t)$	Transformée de Fourier $X(\nu)$
réelle	complexe (partie réelle paire et partie imaginaire impaire)
réelle paire	réelle paire
réelle impaire	imaginaire impaire
imaginaire	complexe (partie réelle impaire, partie imaginaire paire)
imaginaire paire	imaginaire paire
imaginaire impaire	réelle impaire

TABLE 14.4 – *Symétries hermitiques et propriétés de la Transformée de Fourier*

Problème (12 points) : Signal RADAR

Le RADAR est un instrument destiné à déterminer la position d'une cible (avion) dans l'espace. Il comprend une antenne émettrice constituée par un paraboloïde de révolution alimenté par un cornet hyperfréquence placé en son foyer (Fig.14.63). L'onde émise $x(t)$ est une succession périodique d'impulsions de fréquence f_0, de durée τ et de période de répétition T. L'onde incidente se propage avec une célérité c =300000km/s dans l'espace libre en direction de la cible. Elle est réfléchie par celle-ci dans tout l'espace. Une partie du signal réfléchi est capté par l'antenne avant l'émission d'un nouveau train d'ondes. Le signal reçu par l'antenne est donc un signal semblable au signal incident, fortement atténué par le trajet aller-retour et retardé du temps de propagation correspondant t_d.

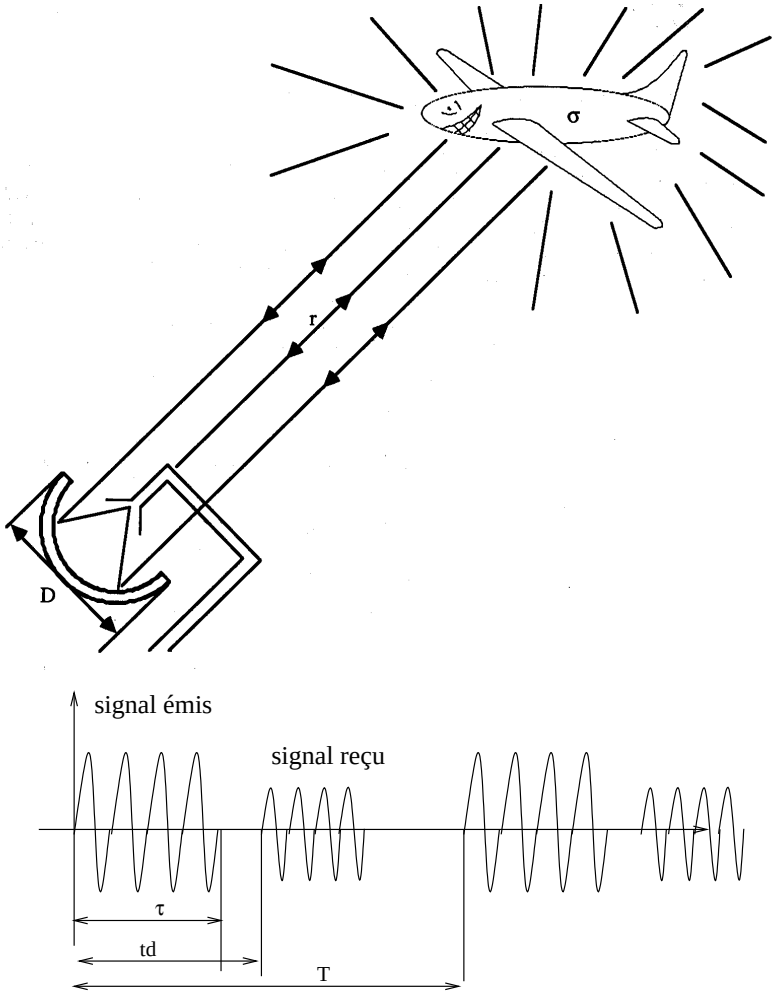


FIGURE 14.63 – Description du radar

Grandeurs temporelles caractéristiques du signal radar

Soit r la distance de l'avion à l'antenne.

1. Déterminer la relation entre le retard t_d et la distance r
2. Quelle doit être la durée maximale τ des impulsions pour mesurer une distance de 150 m (radar d'atterrissage)
3. Si on appelle P la portée du radar, quelle est la limite inférieure de la période de répétition T pour que la portée soit égale à 150 km
4. À l'aide de ces deux quantités temporelles, en déduire la bande spectrale minimale dans laquelle on doit concevoir ce radar pour répondre à cette application
5. Écrire un signal périodique en utilisant les distributions et notamment la fonction peigne de Dirac
6. En déduire une expression de $x(t)$ contenant la fonction peigne de Dirac, de la fonction porte et de la fonction $\cos(\omega_0 t)$

Propriétés spectrales du signal radar

1. Avant même de calculer la Transformée de Fourier du signal radar, quelles caractéristiques peut-on donner du spectre du signal
2. Montrer que le module du spectre $\left|X(\nu)\right|$ s'exprime par

$$\left|X(\nu)\right| = \frac{\tau}{T}\left[\frac{\sin \pi(\nu-\nu_0)\tau}{\pi(\nu-\nu_0)\tau}\sqcup\!\!\sqcup_{1/T}(\nu-\nu_0) + \frac{\sin \pi(\nu+\nu_0)\tau}{\pi(\nu+\nu_0)\tau}\sqcup\!\!\sqcup_{1/T}(\nu+\nu_0)\right] \tag{14.72}$$

3. Représenter schématiquement l'allure du spectre
4. Calculer l'occupation spectrale B du signal $x(t)$ est définie par la largeur de l'intervalle $[-\nu_1;\nu_1]$ où ν_1 est le premier zéro de la fonction sinus cardinal
5. Discuter l'influence de la durée τ de l'emission du signal sur l'amplitude des raies spectrales et sur l'occupation spectrale
6. Proposez une évolution technologique (évolution d'un paramètre physique) pour rendre ce radar plus efficace, plus rapide ou plus sensible

Représentation temporelle	Représentation spectrale
Porte $x(t) = A\Pi_\tau(t)$	$X(\nu) = A\tau\frac{\sin(\pi\nu\tau)}{\pi\nu\tau}$
Sinusoïde tronquée $x(t) = A\sin(2\pi\nu_0 t)\Pi_\tau(t)$	$X(\nu) = \frac{jA\tau}{2}\left[\frac{\sin(\pi(\nu+\nu_0)\tau)}{\pi(\nu+\nu_0)\tau} - \frac{\sin(\pi(\nu-\nu_0)\tau)}{\pi(\nu-\nu_0)\tau}\right]$

TABLE 14.5 – *Transformées de Fourier de fonctions et distributions usuelles*

Aout 2011 (3ème et 4ème Année ENIVL)

École Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire

Rattrapage de Traitement du Signal (TS1)

Lundi 29 août 2011
Durée : 1 heure

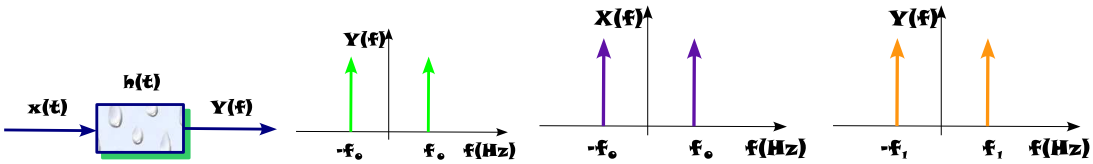
Aucun document autorisé - calculatrice non autorisée

Exercice 1 (7 points)

Soit un signal sinusoïdal de 1 MHz échantillonné à 700 kHz. On effectue la FFT de ce signal sur 4000 points avec un oscilloscope numérique. Reproduisez l'affichage de cette FFT. Attention à bien représenter les axes et leurs unités.

Exercice 2 (13 points)

1. Soit un système caractérisé par le schéma de la Figure 14.105(a). Rappeler le nom de la fonction $h(t)$. Lorsque $x(t) = \delta(t)$, on obtient la réponse $Y(f)$ donnée par la figure (a). Exprimer alors $H(f)$.
2. Calculer la convolution entre $x(t)$ et $y(t)$, sachant que $X(f)$ et $Y(f)$ sont représentées en Figure 14.105(b).



(a) Analyse des systèmes (b) Spectres

FIGURE 14.64 –

École Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire

Oral de Traitement du Signal (TS2)

Lundi 29 août 2011
Durée : 30 mn (dont 15 mn de préparation)
Aucun document autorisé - calculatrice non autorisée

Sujet 1

1. Représenter graphiquement les différentes propriétés du bruit blanc gaussien
   - densité spectrale de puissance
   - fonction d'autocorrélation
   - distribution statistique du bruit
   - représentation temporelle
2. Donner la correspondance entre ces 4 courbes

Sujet 2 :

Définir et commenter la notion de rapport signal sur bruit

Sujet 3 :

Décrire la notion de puissance d'un signal aléatoire

Sujet 4 :

Comparer représentation temporelle et spectrale d'un bruit

Sujet 5 :

Décrire les différences entre un signal déterministe et un signal aléatoire

Janvier 2012 (4ème Année ENIVL)

École Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire

Examen de Traitement du Signal

Vendredi 6 janvier 2012
Durée : 2 heures

- Les exercices devront être rédigés sur des copies séparées
- Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques
- Document autorisé : 1 feuille A4 recto verso avec notes personnelles, formules et résultats (photocopie formellement interdite)
- Documents interdits : annales et correction de cet examen
- Les téléphones portables ne sont pas autorisés et devront être éteints
- Ce sujet comporte 10 pages dont 1 annexe et 5 figures

Problème (10 points) : filtrage linéaire des signaux gaussien et uniforme

Considérons deux bruits blancs de tensions $b_1(t)$ et $b_2(t)$ représentés en Fig.14.95 dont on cherche à évaluer les propriétés statistiques et spectrales :

- moyenne
- variance
- distribution statistique : l'une est gaussienne et l'autre est uniforme
- densité spectrale de puissance

Afin d'étudier ces deux bruits $b_1(t)$ et $b_2(t)$, ils ont été enregistrés sur une durée d'environ 1,6ms et échantillonnés à la fréquence f_e. On a pu relever les informations statistiques suivantes :

- sur les $N = 2^n$ points du signal $b_1(t)$ échantillonné, on a 11443 valeurs de la tension inférieures à 5 Volts
- sur les $N = 2^n$ points du signal $b_2(t)$ échantillonné, on a 10666 valeurs de la tension inférieures à 5 Volts

Afin de diminuer la valeur de la probabilité de dépassement de la valeur seuil de 5 Volts, on a filtré les signaux $b_1(t)$ et $b_2(t)$ à l'aide d'un filtre numérique passe bas de type Butterworth d'ordre 10 et d'un algorithme de suppression de la composante continue. Les deux bruits filtrés $b_1^{(f)}$ et $b_2^{(f)}$ sont représentés en Fig.14.96. De la même manière que précédemment, on a pu relever les informations statistiques suivantes :

- sur les $N = 2^n$ points du signal $b_1^{(f)}$ échantillonné, on a 15971 valeurs de la tension inférieures à 5 Volts
- sur les $N = 2^n$ points du signal $b_2^{(f)}$ échantillonné, on a 14305 valeurs de la tension inférieures à 5 Volts

Enfin, et afin d'effectuer une analyse spectrale des signaux, nous avons appliqué une FFT sur la totalité des $N = 2^n$ points. La figure 14.97 représente les spectres FFT des bruits filtrés et non filtrés. Afin de normaliser l'amplitude de la FFT, exprimée en unité logarithmique arbitraire (u.a.), nous avons également tracé la FFT d'un signal sinusoïdal d'amplitude $A = 1V$ et de fréquence $f_0 = 350kHz$.

Questions préliminaires (signaux non filtrés)

Évaluer, en justifiant vos réponses, les données suivantes :

1. la fréquence d'échantillonnage f_e du signal
2. le nombre de points $N = 2^n$ de chaque signal (multiple de 2)
3. la durée exacte de chaque signal
4. l'unité d'affichage du module de la FFT (dBm, dBV, ou dB) en vérifiant l'amplitude de la FFT du signal sinusoïdal

À partir des seules courbes de la figure 14.95, justifier si l'on peut évaluer les caractéristiques suivantes : valeur moyenne, variance, distribution et bande passante du bruit.

Étude des signaux non filtrés

La statistique des deux bruits non filtrés montrent que $\sigma_{b_1} = 5.81$ Volts et $\sigma_{b_2} = 9.97$ Volts.

1. Calculer la probabilité $P(b_1(t) < 5)$ en considérant les deux cas suivants : distribution gaussienne et distribution uniforme

2. Comparez avec les informations statistiques de dépassement de la valeur de 5V et vérifiez la valeur de la composante continue
3. Calculer la probabilité $P(b_2(t) < 5)$ en considérant les deux cas suivant : distribution gaussienne et distribution uniforme
4. Comparez avec les informations statistiques de dépassement de la valeur de 5V et calculer la valeur de la composante continue en supposant l'information de dépassement exacte

Pour chaque bruit (supposé blanc), évaluer la fréquence de coupure à partir des données spectrale de la FFT. Conclure !

Étude des signaux filtrés

On considère dans cette partie les bruits filtrés $b_1^{(f)}$ et $b_2^{(f)}$. La statistique des deux bruits filtrés montrent que $\sigma_{b_1} = 2.52$ Volts et $\sigma_{b_2} = 4.3$ Volts.

1. Évaluer la fréquence de coupure des bruits filtrés. En déduire la valeur de la densité spectrale de puissance
2. Calculer la probabilité $P(b_1^{(f)} < 5)$ et $P(b_2^{(f)} < 5)$ en considérant les deux cas suivant : distribution gaussienne et distribution uniforme. Interprétez le résultat

Exercice 1 (5 points) : Filtrage non linéaire de signaux gaussiens : cas de l'écrêteur parfait

Considérons l'action d'un écrêteur parfait appliqué sur un bruit gaussien (Fig.14.68). Il s'agit d'un cas particulier d'un "filtrage non linéaire". L'objectif est de calculer la fonction d'autocorrélation $\gamma_y(\tau)$ du signal $y(t)$.

Pour cela, nous avons besoin d'utiliser le théorème de Price qui dit que

$$\frac{d\gamma_y(\tau)}{d\gamma_x(\tau)} = E\left[\frac{df(x(t))}{dx}\frac{df(x(t-\tau))}{dx}\right], \tag{14.73}$$

où $E[.]$ désigne l'espérance statistique, et $f(x)$ est la fonction décrivant le filtrage non linéaire.

1. Après avoir calculé (au sens des distributions) la dérivée de la fonction $f(x) = sign(x)$, montrez que

$$\frac{d\gamma_y(\tau)}{d\gamma_x(\tau)} = 4E\left[\delta(x_1)\delta(x_2)\right], \tag{14.74}$$

où $x_1 = x(t)$ et $x_2 = x(t-\tau)$.

2. Le calcul de l'espérance statistique utilise la densité de probabilité d'un processus gaussien à deux dimensions :

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}\sqrt{1 - C_{x_1x_2}^2/(\sigma_{x_1}^2\sigma_{x_2}^2)}} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_1^2 - 2x_1x_2C_{x_1x_2}/\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}}{2\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}(1-(C_{x_1x_2})^2)}\right), \tag{14.75}$$

où $C_{x_1x_2} = E[x_1(t)x_2(t)]$. En utilisant la définition de l'espérance statistique

$$E[f(x_1)f(x_2)] = \int\int f(x_1)f(x_2)p(x_1, x_2)dx_1dx_2, \tag{14.76}$$

montrer que

$$\frac{d\gamma_y(\tau)}{d\gamma_x(\tau)} = \frac{2}{\pi\sqrt{\sigma_x^4 - \gamma_x^2(\tau)}}. \tag{14.77}$$

3. En déduire l'expression de $\gamma_y(\tau)$ en fonction de $\gamma_x(\tau)$. On donne $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin(x/a) + Cte$.

Exercice 2 (5 points) : Bruit de quantification

Lors d'un processus de conversion d'un signal analogique $x(t)$ en un signal numérique $x_q(t)$, une erreur systématique est générée et conduit à un bruit de quantification $e(t, s)$ que l'on peut considérer, à un instant t donné, comme étant aléatoire (paramètre s) et supposé suivre une loi uniforme $f_e(s) = Cte$. Deux types de conversions, caractérisées par le pas de quantification q, sont possibles :

- ▲ la conversion par troncature qui consiste à ne garder qu'un certain nombre de chiffres significatifs. Exemple : $e = 2.718$ avec 3 chiffres significatifs
- ▼ la conversion par arrondi qui consiste à arrondir au chiffre le plus proche. Exemple : $e = 2.72$ avec 2 chiffres significatifs

1. Représenter graphiquement les courbes $x_q(t)$ en fonction de $x(t)$ dans les deux cas de conversion par troncature et par arrondi pour un signal type $x(t)$ représenté par la figure 14.108
2. Exprimer $e(t)$ en fonction de $x_q(t)$ et $x(t)$ sachant que l'on veut $e(t) \geq 0$ pour la conversion par troncature. En déduire le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la variable aléatoire $e(t)$ dans le cas d'une conversion par troncature et dans le cas d'une conversion par arrondi
3. En utilisant $\int_{\mathcal{D}} f_e(s)ds = 1$, montrer que la distribution $f_e(s)$ est identique dans le cas des 2 types de conversion.
4. Montrer que l'espérance statistique (valeur moyenne) est différente suivant le mode de conversion choisi. En déduire celle qui présente un biais (composante continue)

5. Calculer la variance statistique σ_e^2 pour les deux types de conversion. En déduire que la puissance $\mathcal{P}_e$ du bruit de quantification est identique quelque soit le mode de conversion choisi et vaut :

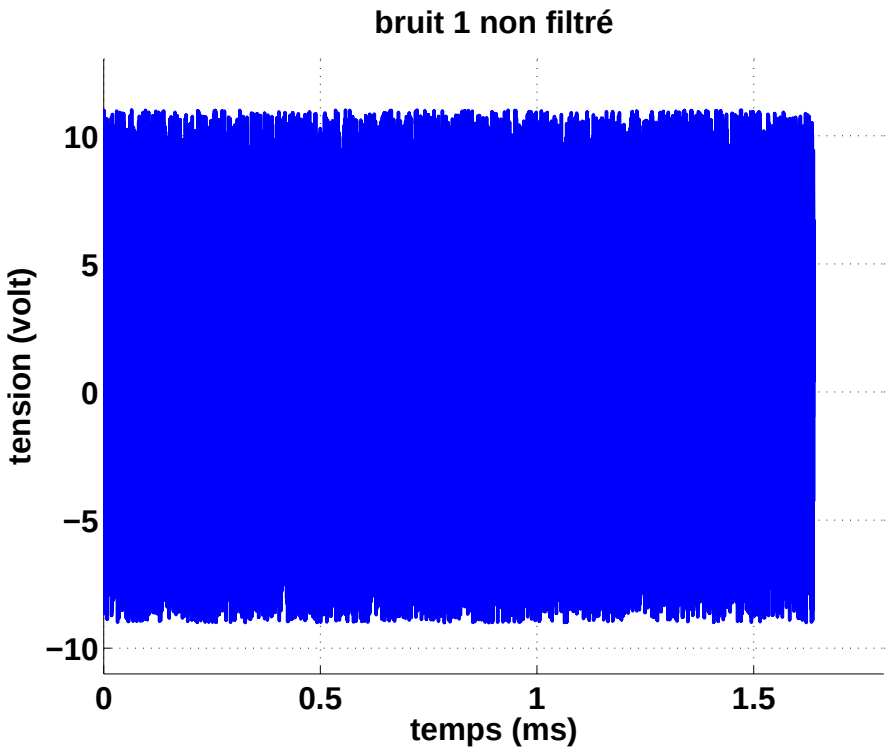
$$\mathcal{P}_e = \frac{q^2}{12} \tag{14.78}$$

ANNEXE

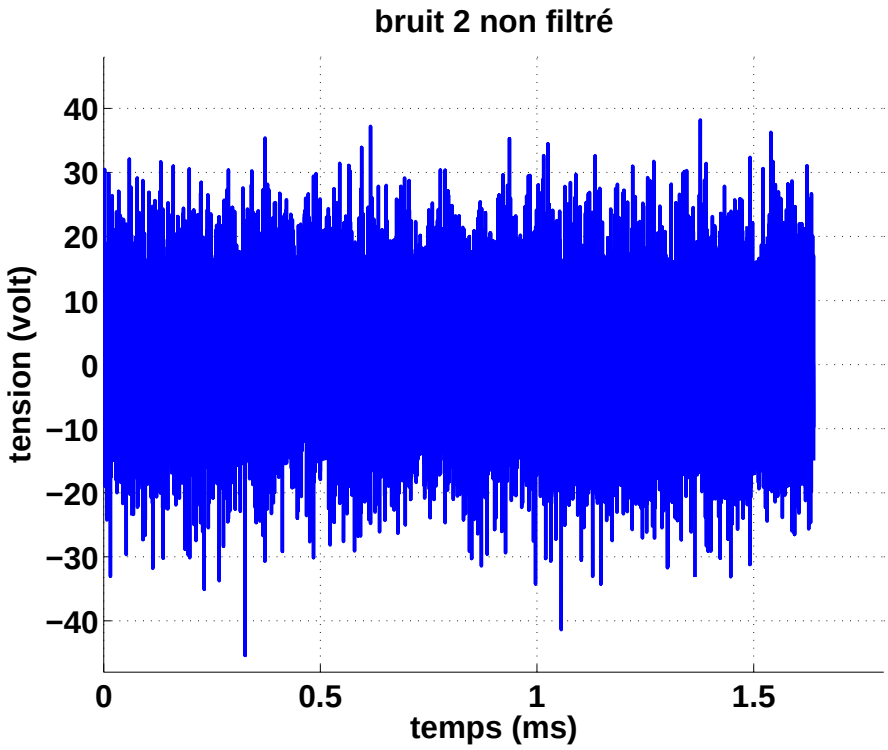
Intégrale $\Pi(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;\,1)$

$$\Pi(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{et} \quad \Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

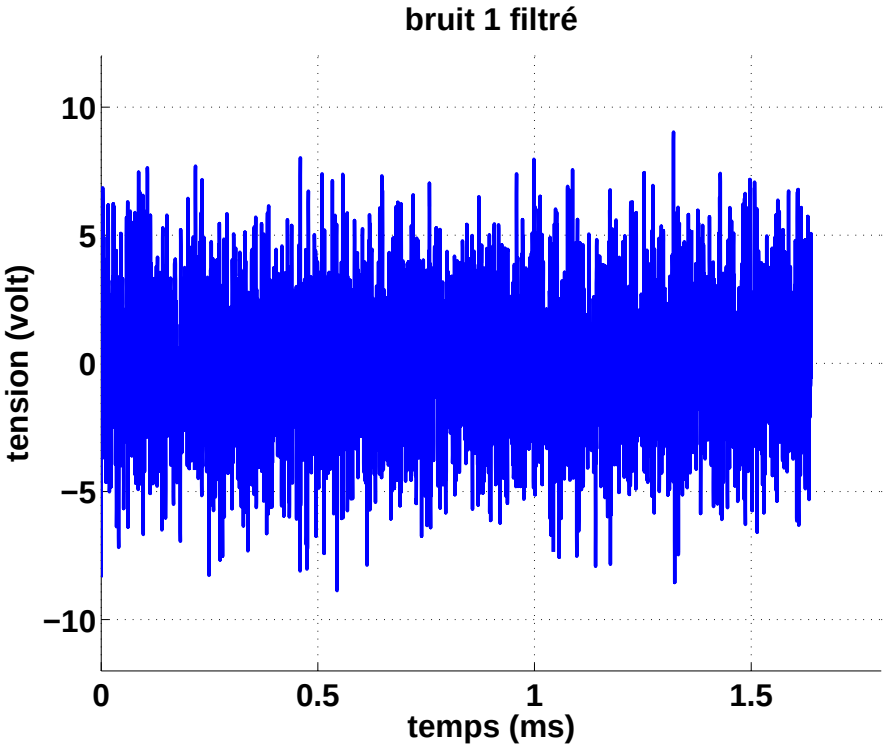


(a)

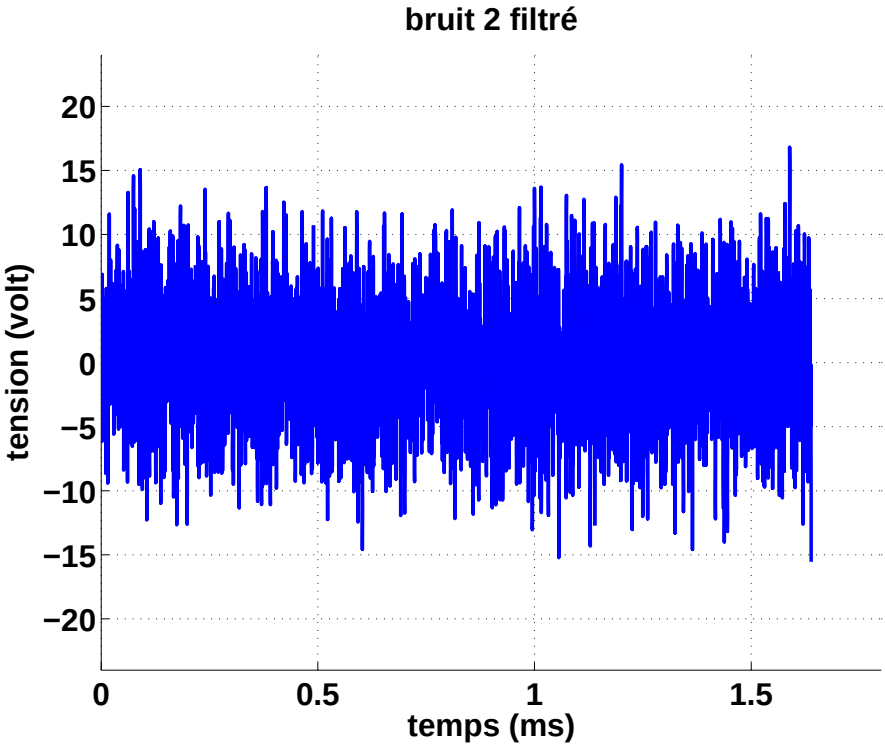


(b)

FIGURE 14.65 – Bruit de tension non filtrés

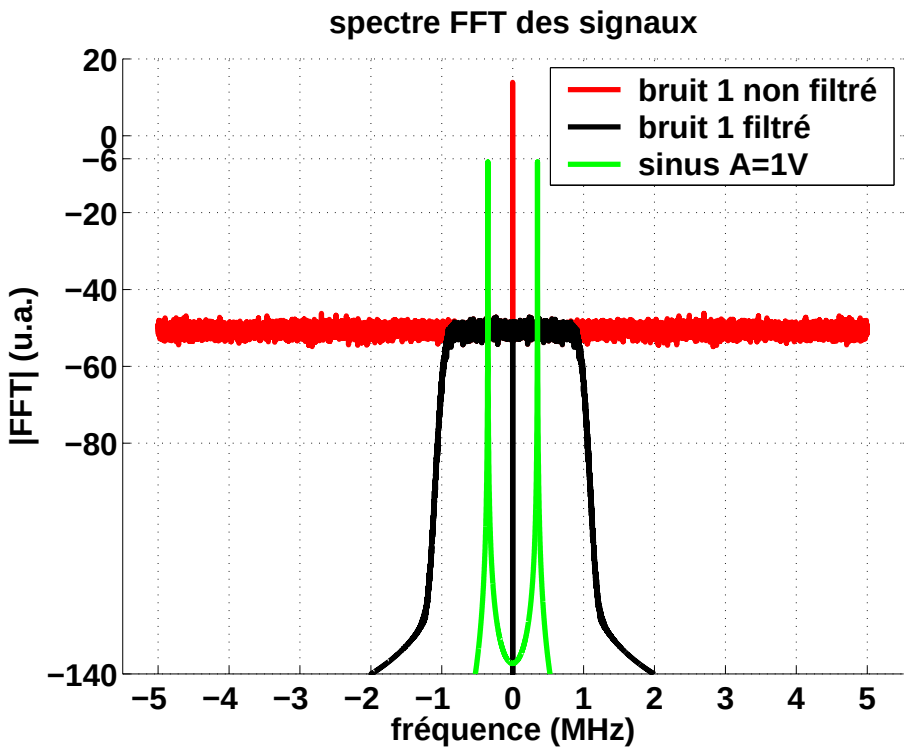


(a)

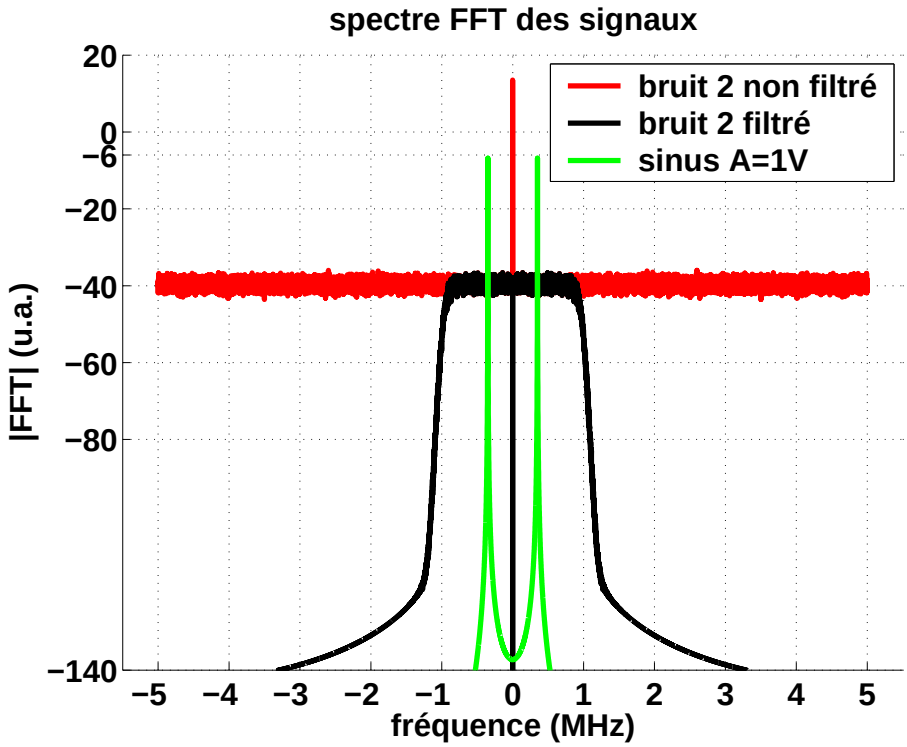


(b)

FIGURE 14.66 – *Bruit de tension filtrés*

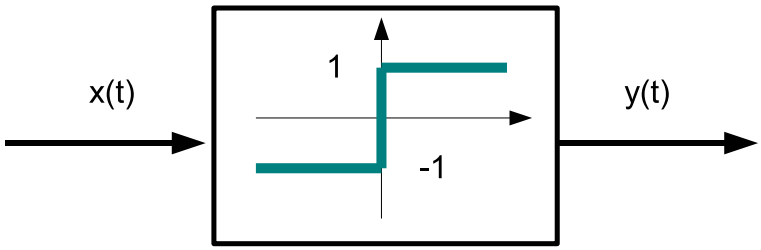


(a)



(b)

FIGURE 14.67 – *FFT des 2 bruits de tension et du signal sinusoïdal d'amplitude $A = 1V$ et de fréquence $f_0 = 350kHz$*



(a)

FIGURE 14.68 – *L'écrêteur parfait : un exemple de "filtrage non linéaire" avec* $y(t) = f(x) = sign(x)$

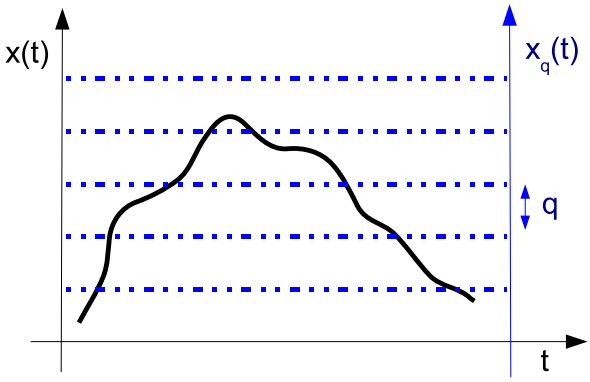


FIGURE 14.69 – *Principe de quantification du signal* $x(t)$*. La plage de variation du signal est découpée en N intervalles de largeur q afin de générer un signal numérique* $x_q(t)$ *(non indiqué ici) qui dépend du mode de conversion*

Mai 2012 (3ème Année ENIVL)

École Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire

Examen de Traitement du Signal
Signaux Déterministes (TS1)

Jeudi 31 mai 2012
Durée : 2 heures

- Les exercices devront être rédigés sur des copies séparées
- Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques
- Document autorisé : 1 feuille A4 recto verso avec notes personnelles, formules et résultats (photocopie formellement interdite)
- Documents interdits : annales et correction de cet examen
- Les téléphones portables ne sont pas autorisés et devront être éteints
- Ce sujet comporte 6 pages dont 1 annexe

Exercice 1 (10 points) : Contrôle Non Destructif par Émission Acoustique

L'Émission Acoustique (AE) est une méthode de Contrôle Non Destructif (CND) faisant référence à la génération d'ondes élastiques transitoires durant un processus de relaxation énergétique très localisé à l'intérieur d'une structure ou d'un matériau. Dans les métaux, ces émissions sont fortement

associées aux mouvements de dislocations accompagnant les déformations plastiques, et à l'initiation puis à la propagation de fissures lorsque ceux-ci sont sous contraintes. D'autres sources AE peuvent provenir de différents phénomènes physiques : fusion, transformations de phase, contraintes thermiques, discontinuités évolutives lors d'une sollicitation mécanique (Fig.14.70).

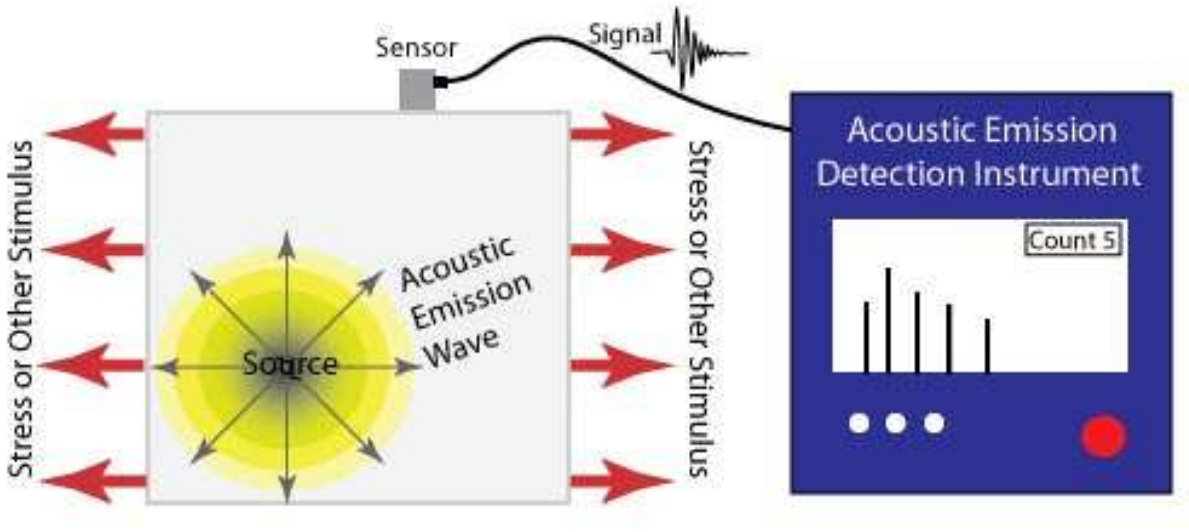


FIGURE 14.70 – Principe de base de l'Émission Acoustique (http://www.ndt-ed.org/)

Lors d'une étude de CND effectuée sur la centrale thermique à eau pressurisée de Rajasthan (Inde), les opérateurs ont relevé 3 spectres de signaux $x_i(t)$ supposés ici déterministes. Ces spectres sont présentés en Figure 14.71 et correspondent à la présence de fissures dans les circuits de refroidissement CSTS (voir Figures 14.75 et 14.76 en Annexe).

1. Déterminer (en justifiant) si le spectre est exprimé en échelle linéaire (Volts) ou logarithmique (dBm)
2. En supposant que les 3 signaux $x_i(t)$ soient des tensions données par $x_i(t) = \sum_{j=1}^{3} A_j^{(i)} \cos(2\pi f_j t)$, évaluer pour les trois cas de la figure 14.71, les valeurs f_j (avec $f_j < f_{j+1}$) et $A_j^{(i)}$ en présentant les résultats dans un tableau synthétique
3. Pourquoi les spectres de la figure 14.71 ne nous permettent pas de déterminer la phase des composantes $A_j^{(i)} \cos(2\pi f_j t + \phi_j)$
4. Évaluer les puissances $\mathcal{P}_i$ des signaux $x_i(t)$
5. Évaluer les rapports (en dB) : $20 \log \left(\frac{A_3^{(2)}}{A_2^{(2)}} \right)$, $20 \log \left(\frac{A_3^{(3)}}{A_1^{(3)}} \right)$ et $20 \log \left(\frac{A_1^{(3)}}{A_2^{(3)}} \right)$

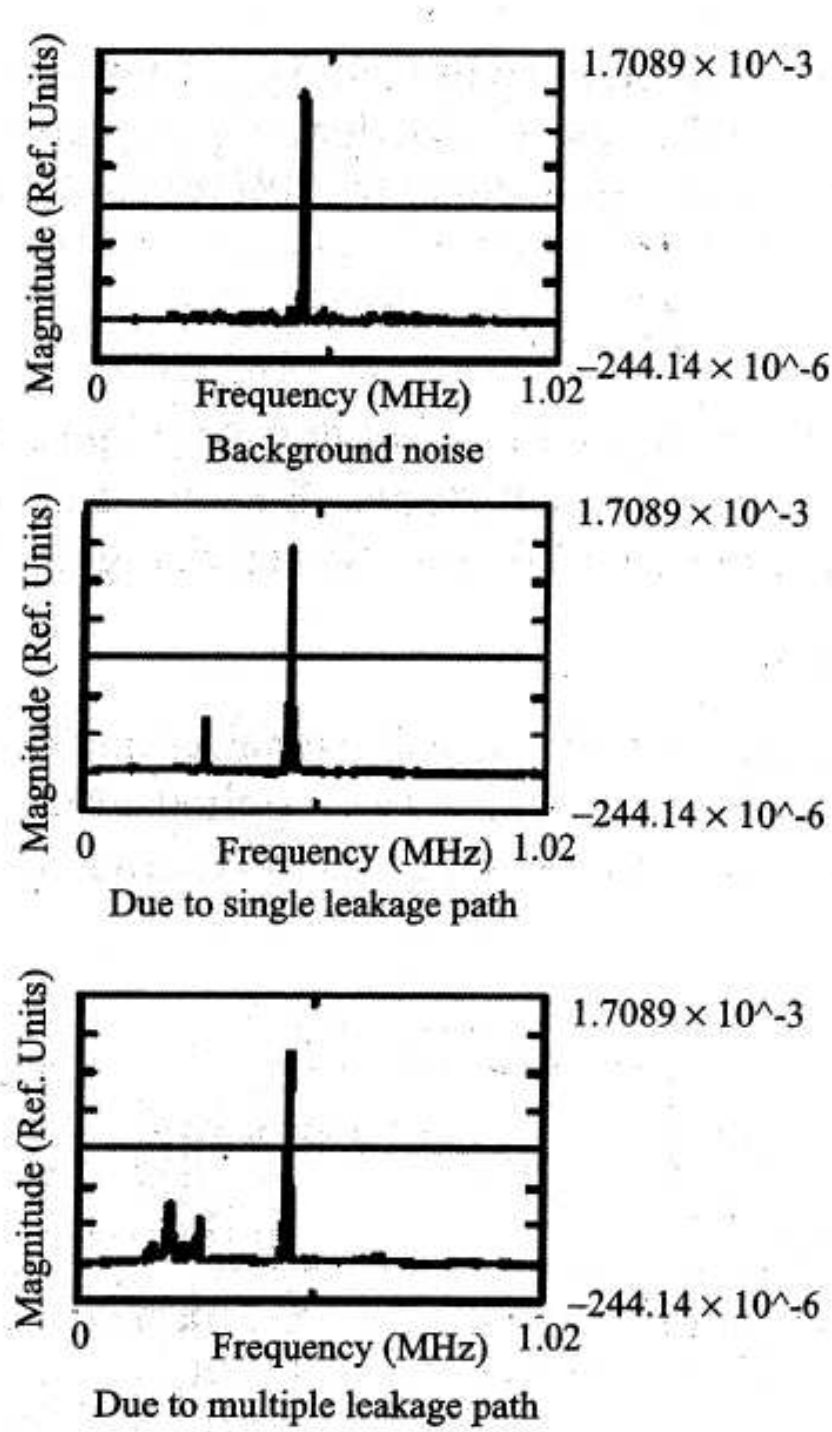


FIGURE 14.71 – Spectres (en amplitude) des signaux d'Émission Acoustique $x_i(t)$ localisés dans les CSTS : sans fissure (haut, $i = 1$), avec une fissure (centre, $i = 2$) et avec deux fissures (bas, $i = 3$)

Exercice 2 (4 points) : convolution et échantillonnage

Si on considère les signaux $x(t)$ et $h(t)$ échantillonnés sur une période $T_e = 1$ s (Fig.14.87), et que l'on cherche à calculer la convolution numérique entre les deux signaux numériques $x[n]$ et $h[n]$, on peut montrer que cette convolution s'écrit

$$y[n] = (x * h)[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]. \tag{14.79}$$

1. Déterminer l'intervalle où la convolution est non nulle
2. Tracer soigneusement $(x * h)[n]$ en fonction de n

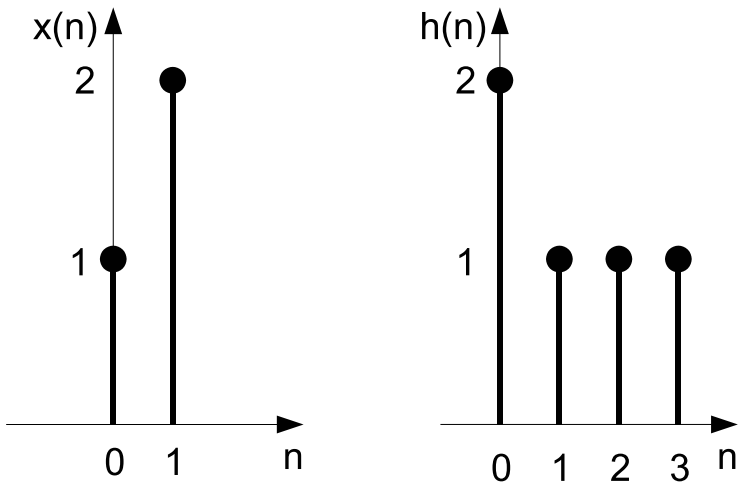


FIGURE 14.72 – Échantillonnage de l'entrée $x(t)$ et de la réponse impultionnelle $h(t)$ pour le calcul de la convolution numérique $y[n]$

Exercice 3 (6 points) : échantillonnage numérique 1D et 2D

Soit $X(f)$ le spectre (Transformée de Fourier) représenté en Fig.14.73a d'un signal 1D audio continu $x(t)$.

1. On décide de numériser ce signal $x(t)$ à une fréquence $Fe = 22$ kHz. Donner l'expression du signal échantillonné $x_{Te}(t)$, en fonction de $x(t)$ et du peigne de Dirac.
2. Tracer le spectre $X_{Fe}(f)$ du signal échantillonné $x_{Te}(t)$ dans l'intervalle [-37 ;37] kHz.
3. Que se passe-t-il dans l'intervalle [7 ;15] ?
4. Soit un système physique caractérisé par la fonction $H(f)$ comme illustré en Fig.14.73b. Comment appelle-t-on la fonction $H(f)$?

5. Tracer le spectre de la fonction $Y(f)$ donné en sortie du système représenté en Fig.14.73c.
6. Tracer le spectre $Y_{Fe}(f)$ du signal échantillonné $y_{Te}(t)$dans l'intervalle [-37 ;37] kHz.
7. L'étude, l'analyse et le traitement des images numériques sont réalisés en considérant l'image comme un signal bidimensionnel 2D. Proposer une explication, liée à l'échantillonnage 2D de l'image numérique, quant à la présence des bandes foncées sur le toit de la maison photographiée (Fig.14.74)

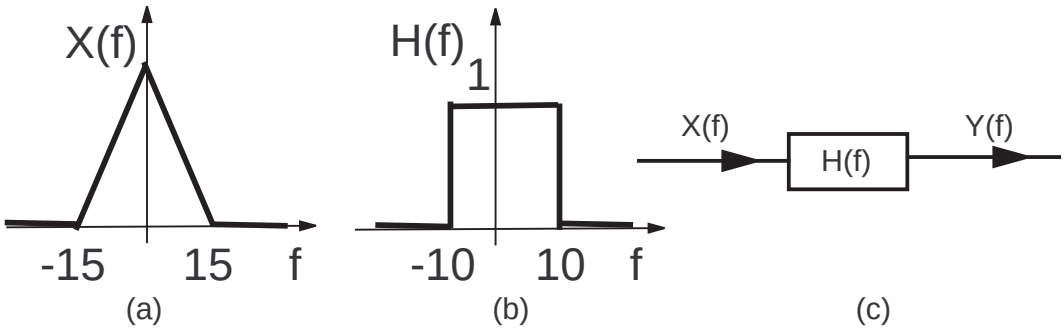


FIGURE 14.73 – Propriétés spectrales des grandeurs $X(f)$ et $H(f)$

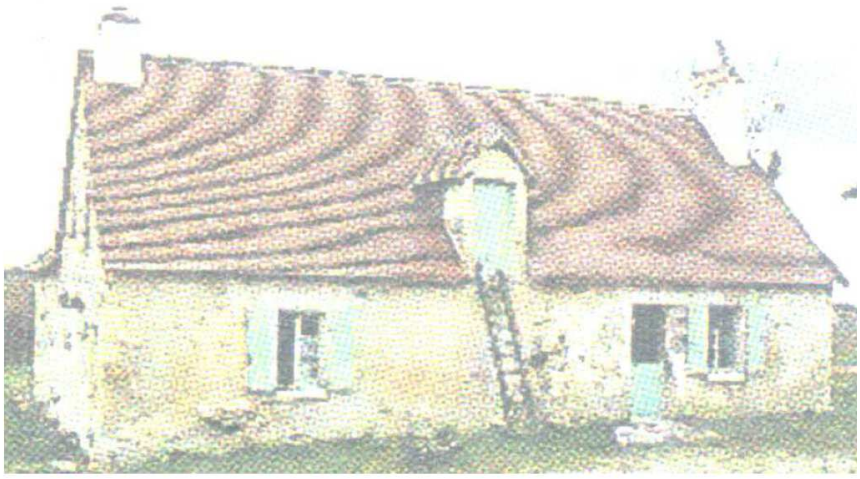


FIGURE 14.74 – Photographie d'une maison en vente dans un journal d'annonces. On peut observer des bandes sur le toit liées à l'échantillonnage spatial de l'image (résolution en pixels)

ANNEXE

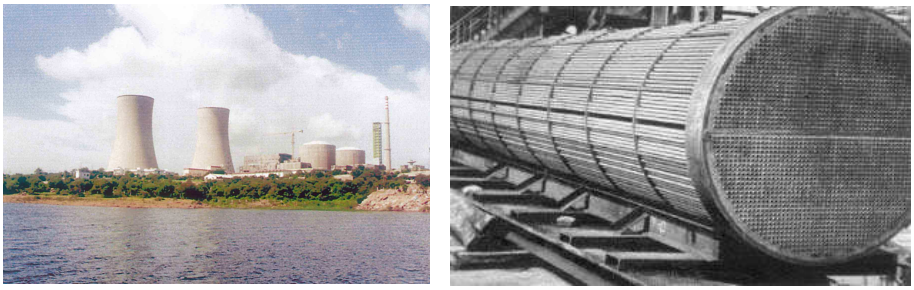


FIGURE 14.75 – Centrale nucléaire à eau pressurisée de Rajasthan (Inde) ; échangeur thermique contrôlé par AE (Baldev Raj *et al.*, "*Practical Digital Signal Processing*", ISBN 978-1-84265-681-5, Alpha Science International, 2011)

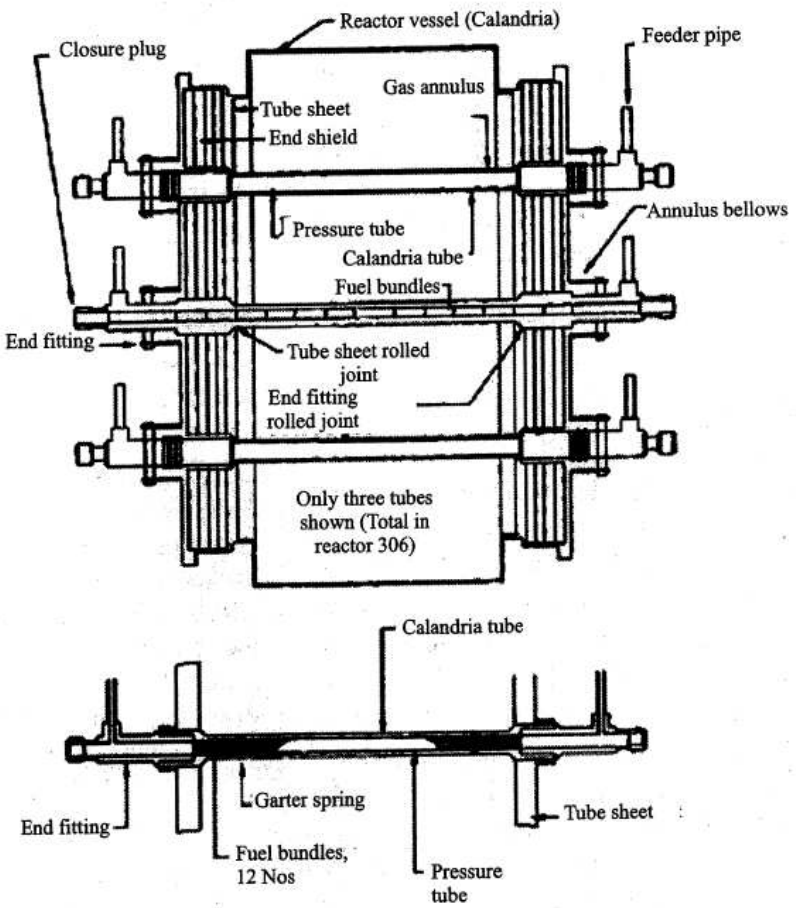


FIGURE 14.76 – Descriptif de l'assemblage des circuits de refroidissement dans l'échangeur thermique d'un réacteur nucléaire à eau pressurisé (PHWR). Les fissures sont détectées et localisées au niveau des CSTS, Calendria Side Tube Sheet (Baldev Raj *et al.*, "*Practical Digital Signal Processing*", ISBN 978-1-84265-681-5, Alpha Science International, 2011)

Août 2012 (3ème Année ENIVL)

École Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire

Rattrapage de Traitement du Signal (TS1)

Mardi 28 août 2012
Durée : 2 heures

Aucun document autorisé - calculatrice non autorisée - téléphones cellulaires interdits

Exercice 1 (6 points)

Soit un signal sinusoïdal de 2 MHz échantillonné à 800 kHz. On effectue la FFT de ce signal sur 8000 points avec un oscilloscope numérique. Reproduisez l'affichage de cette FFT. Attention à bien représenter les axes et leurs unités.

Exercice 2 (6 points)

1. Soit un système caractérisé par le schéma de la Figure 14.105. Rappeler le nom de la fonction $h(t)$. Lorsque $x(t) = 2\delta(t)$, on obtient la réponse $Y(f)$ donnée par la figure (a). Exprimer alors $H(f)$.

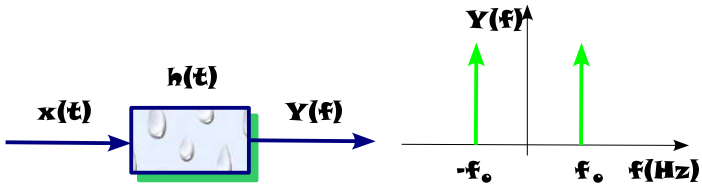


FIGURE 14.77 – Analyse des systèmes

Exercice 3 (8 points) Propriétés spectrales de la modulation d'amplitude

Soit un signal $s(t) = A\left(1 + m\cos(2\pi f_m t)\right)\cos(2\pi f_0 t)$ modulé en amplitude avec un taux $m \leq 1$.

1. Calcul préliminaire (cf TD1) : utiliser la propriété $\delta(t-a) * \delta(t-b) = \delta(t-(a+b))$ pour retrouver la formule trigonométrique $\cos(a)\cos(b) = ...$
2. Représenter graphiquement les différentes propriétés de ce signal $s(t)$ dans le domaine spectral et le domaine temporel
3. Quelle type de densité spectrale on peut définir avec ce type de signal $s(t)$?
4. Calculer la puissance de $s(t)$

Août 2012 (4ème Année ENIVL)

École Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire

Rattrapage de Traitement du Signal (TS2)

Jeudi 30 août 2012
Durée : 2 heures

Aucun document autorisé - calculatrice non autorisée - téléphones cellulaires interdits

Exercice 1 (6 points) : Corrélation de signaux d'amplitude aléatoire

Considérons le signal aléatoire suivant

$$x(t,s) = A(s)\cos\omega t + B(s)\sin\omega t \tag{14.80}$$

où $A(s)$ et $B(s)$ sont des variables aléatoires continues centrées réelles et du second ordre indépendantes. Appelons σ_A^2 et σ_B^2 les variances respectives de $A(s)$ et $B(s)$ et γ_{AB} la covariance statistique entre $A(s)$ et $B(s)$.

1. Calculer la valeur moyenne statistique $m(t)$ de $x(t,s)$.
2. Calculer la fonction de covariance statistique $\gamma_x(t_1,t_2)$ en fonction des quantités σ_A^2, σ_B^2 et γ_{AB}.
3. Déduire la condition nécessaire et suffisante pour que le signal soit stationnaire du second ordre.

Exercice 2 (6 points) : Signaux aléatoires stationnaires et périodiques

Considérons un signal aléatoire réel stationnaire $x(t)$, de période T, *i.e.*

$$x(t) = x(t+kT) \;\; k \in Z \tag{14.81}$$

1. Exprimer $\gamma_x(\tau)$ sa fonction d' autocorrélation
2. Montrer que cette fonction d'autocorrélation est également périodique de période T

3. Comparer $\gamma_x(\tau)$ et $\gamma_x(T/2-\tau)$ et en déduire que $\gamma_x(\tau)$ peut être construite à partir des valeurs de $\gamma_x(\tau)$ avec $0 < \tau < T/2$.

Exercice 3 (8 points) : Densité spectrale conjointe de deux bruits

Un générateur de bruit blanc $e(t)$ de densité spectrale $S_e(f)$ alimente le circuit de la figure 14.102. Le transformateur est supposé parfait de rapport 1/2. La sortie $v_2(t)$ résulte du filtrage de $e(t)$ par un passe-bas du deuxième ordre, tandis que la sortie $v_1(t)$ résulte du filtrage de $e(t)$ par un passe-haut du deuxième ordre.

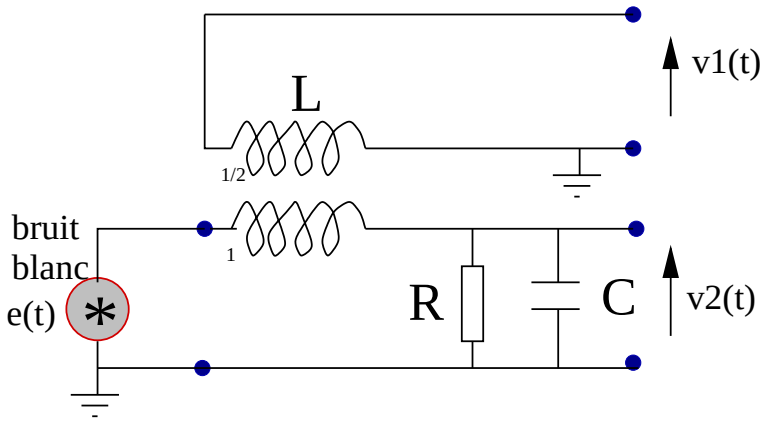


FIGURE 14.78 – Génération de deux bruits corrélés issus d'une même source

1. Calculer les réponses harmoniques $H_{v_1}(\omega)$ et $H_{v_2}(\omega)$ entre l'entrée (de réponse $E(\omega)$) et les deux sorties.
2. En déduire les densités spectrales du bruit filtré $S_{11}(f)$ et $S_{22}(f)$. Tracez les courbes

Mai 2013 (3ème Année ENIVL)

PRES "Centre - Val de Loire Université"

Centre Val de Loire
UNIVERSITÉ
Spirit of the Loire Valley

École Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire

ENI Val de Loire
Ecole Nationale d'Ingénieurs

Examen de Traitement du Signal

Jeudi 30 mai 2013
Durée : 2 heures

- Le problème devra être rédigé sur une copie séparée
- Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques
- Document autorisé : 1 feuille A4 recto verso avec notes personnelles, formules et résultats (photocopie formellement interdite)
- Documents interdits : annales et correction de cet examen
- Les téléphones portables ne sont pas autorisés et devront être éteints
- Ce sujet comporte 3 pages

Exercice 1 (4 points) Propriétés spectrales de la modulation d'amplitude

Soit un signal $s(t) = A\left(1 + m\cos(2\pi f_m t)\right)\cos(2\pi f_0 t)$ modulé en amplitude avec un taux $m \leq 1$. On donne $f_0 = 1$MHz et $f_m = 200$kHz.

1. Calcul préliminaire (cf TD1) : utiliser la propriété $\delta(t-a) * \delta(t-b) = \delta(t-(a+b))$ pour retrouver la formule trigonométrique $\cos(a)\cos(b) = ...$
2. Représenter graphiquement les différentes propriétés de ce signal $s(t)$ dans le domaine spectral et le domaine temporel
3. Quelle type de densité spectrale on peut définir avec ce type de signal $s(t)$?
4. Calculer la puissance de $s(t)$

Exercice 2 (3 points)

Soit un signal sinusoïdal, d'amplitude $A = 1$V, de fréquence f_0=2 MHz, et échantillonné à 700 kHz. On effectue la FFT de ce signal sur 8192 points avec un oscilloscope numérique ne possédant pas de filtre anti-repliement. Préciser la position des raies sur le spectre FFT (quel indice du fichier et quelle valeur de la fréquence en MHz ?). Reproduisez l'affichage de cette FFT en justifiant votre figure. Assurez-vous de bien représenter les axes et leurs unités.

Exercice 3 (3 points) : Propriétés spectrales de signaux

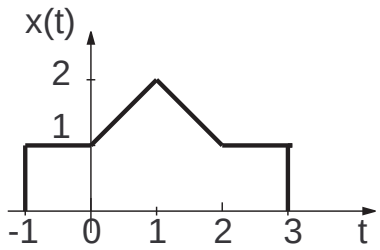


FIGURE 14.79 – Signal temporel

Soit le signal $x(t)$ représenté en Fig.14.101 et $X(\nu) = A(\nu) + jB(\nu)$ sa Transformée de Fourier (TF). Calculer ou justifier les quantités suivantes :

1. $X(0)$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)d\nu$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 d\nu$

Problème (10 points) : Analyseur de spectres avec corrélateur

Un système physique, soumis à une excitation impultionnelle, délivre un signal de "relaxation" $s(t)$ qui décrit le retour du système vers son état d'équilibre. L'estimation de $s(t)$ permet de connaître quelques paramètres caractéristiques du système physique.

Dans cette étude, on suppose que la réponse du système à une excitation impultionnelle est de la forme

$$s(t) = Ae^{-\alpha(t-t_0)}H(t-t_0), \tag{14.82}$$

où $H(t)$ est la fonction d'Heaviside ($H(t) = 0$ si $t < 0$, $H(t) = 1$ si $t > 0$), A est l'amplitude du signal, $1/\alpha$ le temps de relaxation du système et t_0 l'instant d'apparition de l'excitation (constantes caractéristiques du système physique).

Pour pouvoir caractériser ce système, on utilise un montage corrélateur (Fig.14.86), dans lequel le générateur délivre un signal de la forme $y(t) = \sqrt{2\beta}e^{-\beta t}H(t)$ avec $\beta > 0$ un paramètre ajustable à volonté.

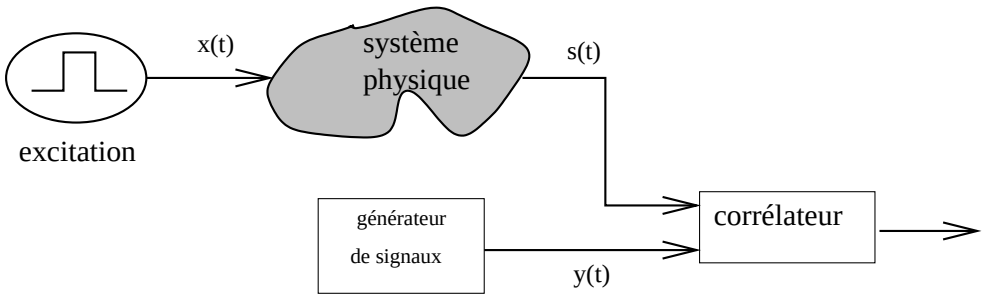


FIGURE 14.80 – Identification d'un système physique par corrélation : dispositif expérimental

1. Calculer l'énergie du signal $y(t)$
2. Le corrélateur permet le calcul de la fonction d'intercorrélation $\Gamma_{ys}(\tau)$ des deux signaux $y(t)$ et $s(t)$ définie par :

$$\Gamma_{ys}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)s(t+\tau)dt. \tag{14.83}$$

   Exprimer $\Gamma_{ys}(\tau)$ en fonction de $\alpha, \beta, A, t_0, \tau$. Montrer qu'elle est maximale pour $\tau = t_0$.
3. Étudier l'évolution de $\Gamma(\tau = t_0)$ en fonction de β. En déduire une méthode qui permettrait de déterminer expérimentalement les constantes A et α.

Août 2013 (4ème Année ENIVL)

École Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire

Rattrapage de Traitement du Signal (TS2)

Mardi 27 août 2013
Durée : 2 heures

Aucun document autorisé - calculatrice non autorisée - téléphones cellulaires interdits

Exercice 1 (6 points) : Filtrage de signal aléatoire gaussien

Soit un signal aléatoire gaussien centré $x(t)$ de densité spectrale constante dans la bande $\Delta\nu = [-f_0, f_0]$ et de puissance $\mathcal{P}_x = 0$ dBm, avec $f_0 = 8$MHz.

1. Comment s'appelle ce bruit ? Calculer sa densité spectrale de puissance $S_x(\nu)$
2. Calculer la probabilité pour que $x(t) > 0.4$

On filtre ce signal avec un filtre passe bas idéal de fréquence de coupure $f_0/2$.

1. Calculer la puissance de ce bruit (en dBm)
2. Calculer la probabilité pour que $x(t) > 0.4$

Exercice 2 (6 points) : Corrélation de signaux d'amplitude aléatoire

Considérons le signal aléatoire suivant

$$x(t,s) = A(s)\cos\omega t + B(s)\sin\omega t, \tag{14.84}$$

où $A(s)$ et $B(s)$ sont des variables aléatoires continues centrées réelles et du second ordre indépendantes. Appelons σ_A^2 et σ_B^2 les variances respectives de $A(s)$ et $B(s)$ et γ_{AB} la covariance statistique

entre $A(s)$ et $B(s)$.

1. Calculer la valeur moyenne statistique $m(t)$ de $x(t,s)$.
2. Calculer la fonction de covariance statistique $\gamma_x(t_1,t_2)$ en fonction des quantités σ_A^2, σ_B^2 et γ_{AB}.
3. Déduire la condition nécessaire et suffisante pour que le signal soit stationnaire du second ordre.

Exercice 3 (8 points) : Signal avec bruit d'amplitude aléatoire

On considère un signal aléatoire $x(t,s) = A(1+mb(s))\cos\left(2\pi f_0 t\right)$ de fréquence f_0 pour lequel l'amplitude $A(s) = A(1+mb(s))$ est bruité (avec $m << 1$) par un signal $b(s)$ aléatoire stationnaire d'ordre 2, centré et ayant pour fonction d'autocorrélation $\gamma_b(\tau)$.

1. Calculer la valeur moyenne $E[x]$
2. Calculer la fonction d'autocorrelation $\gamma(t,t-\tau) = E[x(t,s)x^*(t-\tau,s)]$
3. Montrer que le signal $x(t,s)$ est stationnaire d'ordre 2
4. Montrer que sa densité spectrale de puissance $S_x(\nu)$ est donnée par

$$S_x(\nu) = \frac{1}{4}\left(S_A(\nu-\nu_0) + S_A(\nu+\nu_0)\right) \tag{14.85}$$

ANNEXE 2

Intégrale $\Pi(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;1)$

$$\Pi(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{et} \quad \Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Janvier 2014 (4ème Année INSA CVL)

PRES "Centre - Val de Loire Université"

Institut National des Sciences Appliquées
Centre Val de Loire
Département Génie des Systèmes Industriels

Examen de Traitement du Signal (TS2)

Jeudi 30 janvier 2014
Durée : 2 heures

- Les exercices devront être rédigés sur des copies séparées
- Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques
- Document autorisé : 1 feuille A4 recto verso avec notes personnelles, formules et résultats (photocopie formellement interdite)
- Documents interdits : annales et correction de cet examen
- Les téléphones portables ne sont pas autorisés et devront être éteints
- Ce sujet comporte 8 pages dont 1 annexe

Exercice 1 (10 points) : Signaux en présence d'un système non linéaire

Il s'agit d'étudier la conséquence de l'action d'un système non linéaire sur un signal aléatoire gaussien.

Le système non linéaire (SNL) le plus simple que nous pouvons étudier est le quadrateur (Fig.14.81) pour lequel la relation entrée-sortie s'écrit

$$y(t) = Ax^2(t), \tag{14.86}$$

où A est une constante (exprimée en Volt^{-1}).

FIGURE 14.81 – Exemple d'un système non linéaire : le quadrateur

Cas d'une excitation sinusoïdale

On applique une tension sinusoïdale $x(t) = X_0 \cos(2\pi f_0 t)$.

1. Calculer et représenter le spectre $X(\nu)$ du signal d'entrée $x(t)$
2. Calculer et représenter le spectre $Y(\nu)$ du signal $y(t)$
3. Identifier les fréquences créées ou supprimées par l'action du quadrateur sur le signal sinusoïdal

Cas d'une excitation aléatoire gaussienne

Calcul du spectre Dans cette partie, on applique un bruit $b(t)$ gaussien centré.

1. Montrer que $E[y(t)] = A\sigma_b^2$
2. En utilisant les résultats liés au bruit gaussien présentés en Annexe 1, montrer que la fonction d'autocorrélation $\gamma_y(\tau)$ de la sortie s'écrit

$$\gamma_y(\tau) = 2A^2\gamma_b^2(\tau). \tag{14.87}$$

3. En utilisant le théorème de Wiener-Kintchine, en déduire la densité spectrale de puissance $S_y(\nu)$ du signal de sortie, exprimée en fonction de A et $S_b(\nu)$.

Application au cas d'un bruit blanc filtré Considérons que le bruit $b(t)$ est filtré par un filtre passe bas de coupure f_c.

1. Calculer la puissance totale $\mathcal{P}$ du bruit dans le domaine spectral. En déduire l'expression de $S_b(\nu)$ en fonction de σ_b et f_c.
2. Représenter graphiquement la densité spectrale de puissance $S_y(\nu)$
3. Identifier les "régions fréquentielles" principalement modifiées par l'action du quadrateur sur le bruit gaussien filtré. Comparer avec le cas du signal sinusoïdal évoqué précédemment.

Exercice 2 (10 points) : Résolution de l'analyseur de spectre

Les mesures de densité spectrale de puissance $S_x(\nu)$ s'effectuent par un analyseur de spectre. Cet appareil fonctionne en procédant à un balayage de la bande spectrale du signal à analyser (appelée SPAN), par une fenêtre de résolution (RES) suffisamment étroite BW (Fig.14.82). La puissance du signal $x(t)$ mesurée dans cette fenêtre RES BW centrée en ν_0 permet d'approximer la valeur de la densité spectrale $S_y(\nu_0)$ par

$$S_y(\nu_0) = \int_{SPAN} S_x(\nu) BW(\nu_0 - \nu) d\nu. \tag{14.88}$$

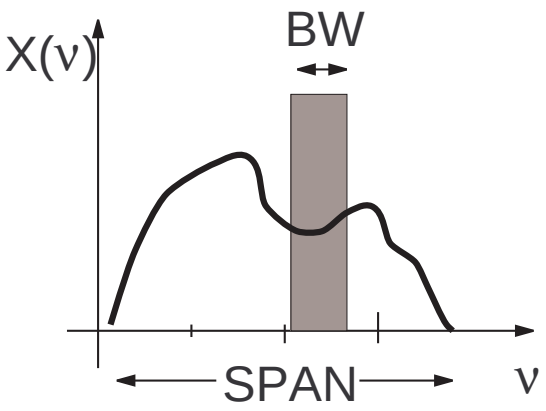


FIGURE 14.82 – propriétés de l'analyseur de spectre

1. Exprimer la relation (14.88) sous la forme d'un produit de convolution de fonctions de type "portes" et de $S_x(\nu)$
2. En déduire la condition pour que la mesure soit parfaite (*i.e.* $S_y(\nu_0) = S_x(\nu_0)$). Est-ce physiquement possible à réaliser ?
3. Expliquer pourquoi cette approximation n'a pas de conséquences sur la mesure d'un signal sinusoïdal non bruité.
4. Que se passe-t-il si on mesure un bruit blanc ?

On souhaite analyser un signal $x(t)$ contenant une porteuse modulée en amplitude par un bruit $b(t)$ s'écrivant

$$x(t) = A_0(1 + m.b(t))\cos(2\pi f_0 t), \tag{14.89}$$

où m est le taux de modulation à déterminer. La figure 14.83(a) représente le signal $x(t)$ à étudier. Les figures 14.83(b) et 14.83(c) représentent deux cas où la modulation est sinusoïdale et triangulaire avec le même taux m.

5. Déduire de la figure 14.83 le taux de modulation m.
6. La figure 14.84(a) représente le spectre du signal $x(t)$ avec $m = 0$. Identifier les 3 raies du spectre. Évaluer la puissance du signal $x(t)$ à partir de ce spectre et en déduire une valeur de l'amplitude A_0.
7. Calculer le spectre théorique du signal $x(t)$ dans le cas où le spectre $B(\nu)$ du bruit est blanc et filtré dans la bande [-f_c,+f_c] avec $f_c = \frac{f_0}{4}$. Tracer soigneusement le spectre théorique et le comparer avec celui de la figure 14.84(b)
8. Interpréter la différence entre les deux spectres de la figure 14.85
9. Mesurer le rapport signal sur bruit de la porteuse dans les deux cas (a) et (b). En déduire une autre évaluation du taux de modulation m. Conclure en proposant une valeur précise de A_0, m et f_0.

Annexe 1 : Propriétés particulières d'un signal Gaussien

Considérons un ensemble de variables aléatoires gaussiennes de moyennes nulles ($E[x_i] = \overline{x_i} = 0$), et de covariance statistique $E[x_i x_j] = \overline{x_i x_j}$. Dans ce cas très particulier de variables gaussiennes, on a les résultats suivants :

– la moyenne du produit de trois variables gaussiennes est nulle, *i.e.*

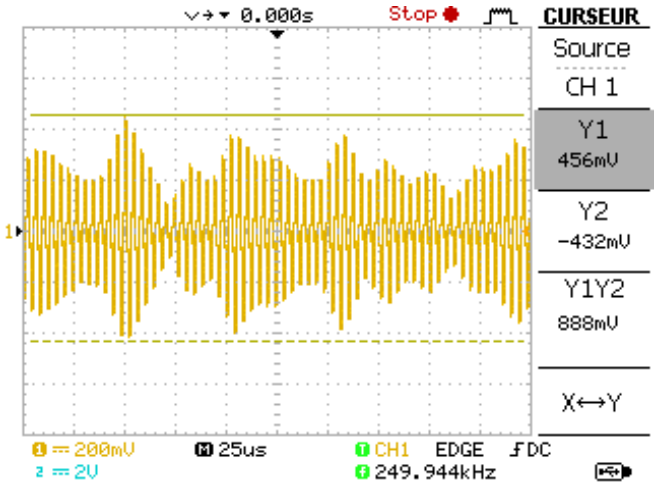
$$\overline{x_i\ x_j\ x_k} = 0. \tag{14.90}$$

– la moyenne du produit de 4 variables s'exprime en fonction des covariances statistiques, *i.e.*

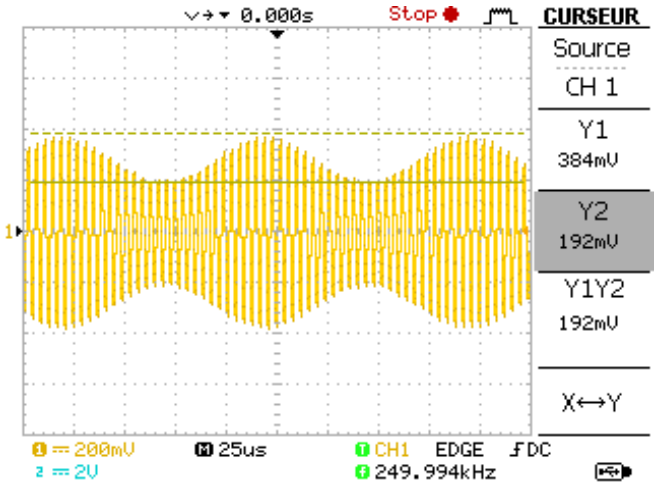
$$\overline{x_i\ x_j\ x_k\ x_l} = \overline{x_i\ x_j}\ \overline{x_k\ x_l} + \overline{x_i\ x_k}\ \overline{x_j\ x_l} + \overline{x_i\ x_l}\ \overline{x_j\ x_k}. \tag{14.91}$$

Représentation temporelle	Représentation spectrale
Porte $x(t) = A\Pi_\tau(t)$	$X(\nu) = A\tau\frac{\sin(\pi\nu\tau)}{\pi\nu\tau}$
Sinusoïde tronquée $x(t) = A\sin(2\pi\nu_0 t)\Pi_\tau(t)$	$X(\nu) = \frac{jA\tau}{2}\left[\frac{\sin(\pi(\nu+\nu_0)\tau)}{\pi(\nu+\nu_0)\tau} - \frac{\sin(\pi(\nu-\nu_0)\tau)}{\pi(\nu-\nu_0)\tau}\right]$
Sinus cardinal $x(t) = A\frac{\sin(\pi\nu_0\tau)}{\pi\nu_0\tau}$	$X(\nu) = \frac{A}{\tau}\Pi_\tau(\nu)$
Triangle $x(t) = \Lambda_{2\tau}(t)$	$X(\nu) = A\tau\left[\frac{\sin(\pi\nu\tau)}{\pi\nu\tau}\right]^2$

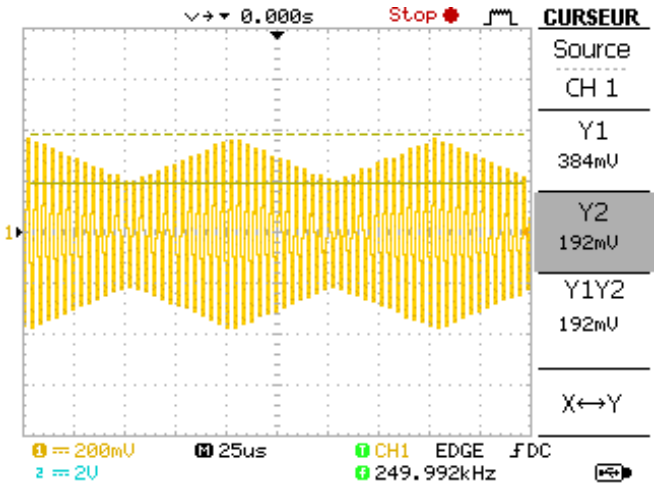
TABLE 14.6 – *Transformées de Fourier de fonctions et distributions usuelles*



(a)

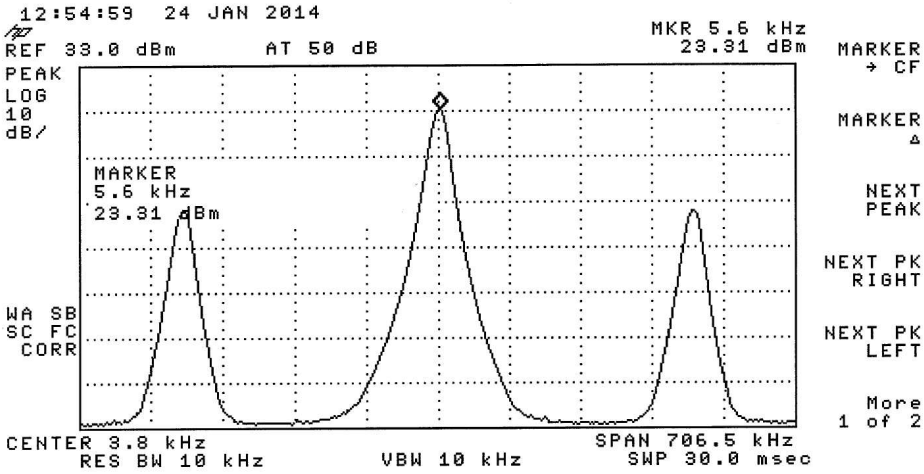


(b)

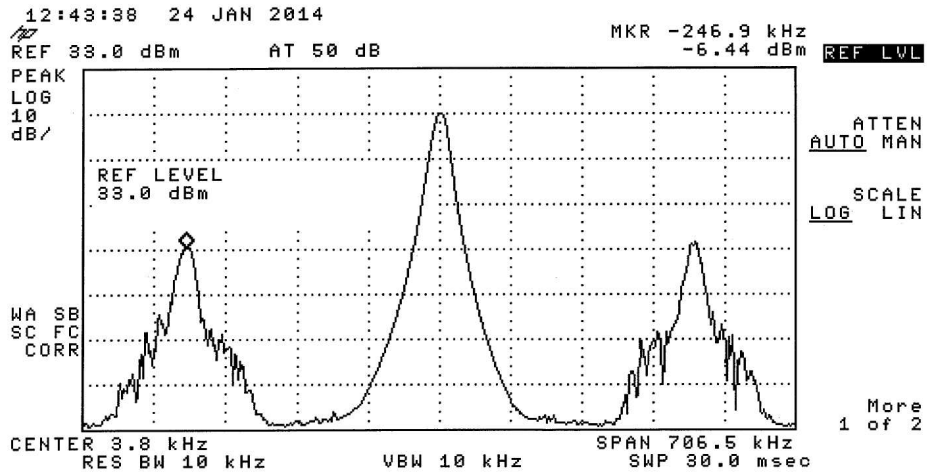


(c)

FIGURE 14.83 – Représentations temporelles de signaux modulés en amplitude avec le même taux de modulation m, mais avec des formes de modulation différentes. Base de temps de l'oscilloscope : $25\mu s$

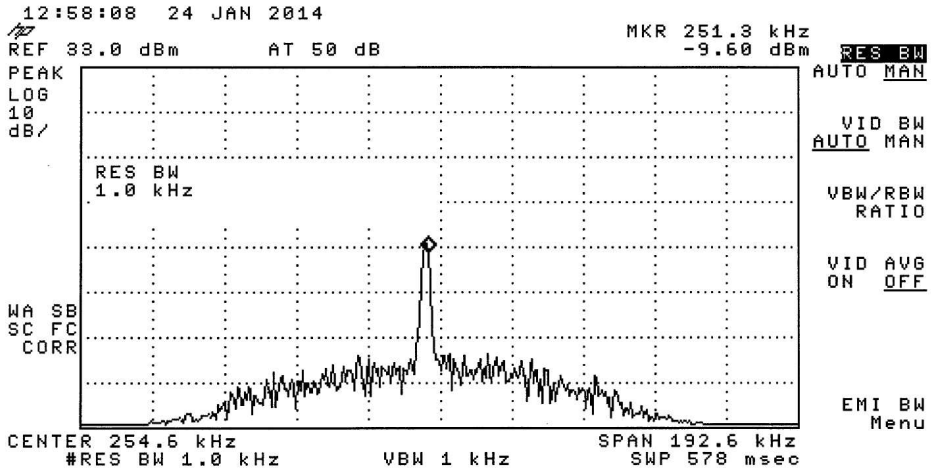


(a) $m = 0$

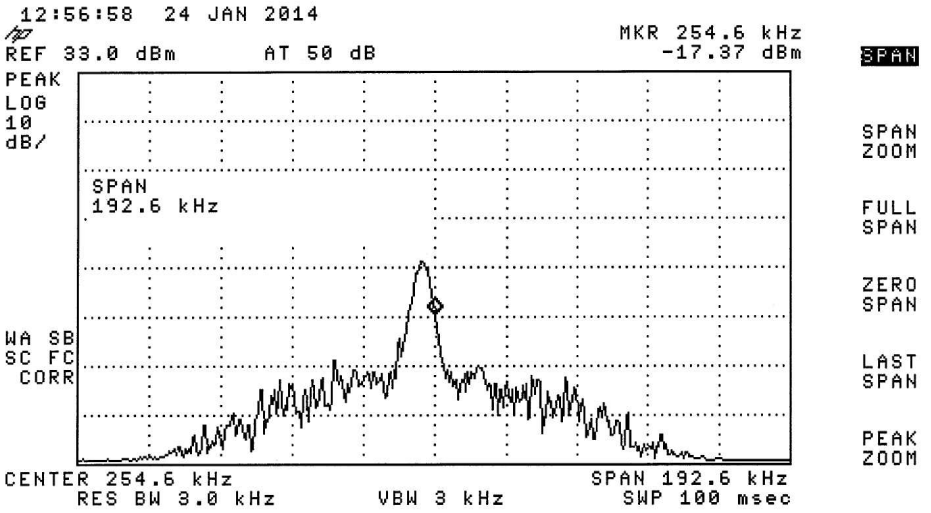


(b) $m \neq 0$

FIGURE 14.84 – Spectre du signal $x(t)$ avec $m = 0$ (a) et $m \neq 0$ (b)



(a) RES BW = 1 kHz



(b) RES BW = 3 kHz

FIGURE 14.85 – Spectre du signal $x(t)$ mesuré en fonction de deux valeurs de BW différentes.

Mai 2014 (3ème Année INSA CVL)

Institut National des Sciences Appliquées
Centre Val de Loire
Département Génie des Systèmes Industriels

Examen de Traitement du Signal (TS1)

Mardi 27 mai 2014
Durée : 2 heures

- Les exercices devront être rédigés sur des copies séparées
- Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques
- Document autorisé : 1 feuille A4 recto verso avec notes personnelles, formules et résultats (photocopie formellement interdite)
- Documents interdits : annales et correction de cet examen
- Les téléphones portables ne sont pas autorisés et devront être éteints
- Ce sujet comporte 4 pages

Exercice 1 (8 points) : corrélateur

Un système physique, soumis à une excitation impultionnelle, délivre un signal de "relaxation" $s(t)$ qui décrit le retour du système vers son état d'équilibre. L'estimation de $s(t)$ permet de connaître quelques paramètres caractéristiques du système physique.

Dans cette étude, on suppose que la réponse du système à une excitation impultionnelle est de la forme

$$s(t) = Ae^{-\alpha(t-t_0)}H(t-t_0), \tag{14.92}$$

où $H(t)$ est la fonction d'Heaviside (fonction échelon), A est l'amplitude du signal, $1/\alpha$ le temps de relaxation du système et t_0 l'instant d'apparition de l'excitation (constantes caractéristiques du système physique).

Pour pouvoir caractériser ce système, on utilise un montage corrélateur (Fig.14.86), dans lequel le générateur délivre un signal de la forme $y(t) = \sqrt{2\beta}e^{-\beta t}H(t)$ avec $\beta > 0$ un paramètre ajustable à volonté.

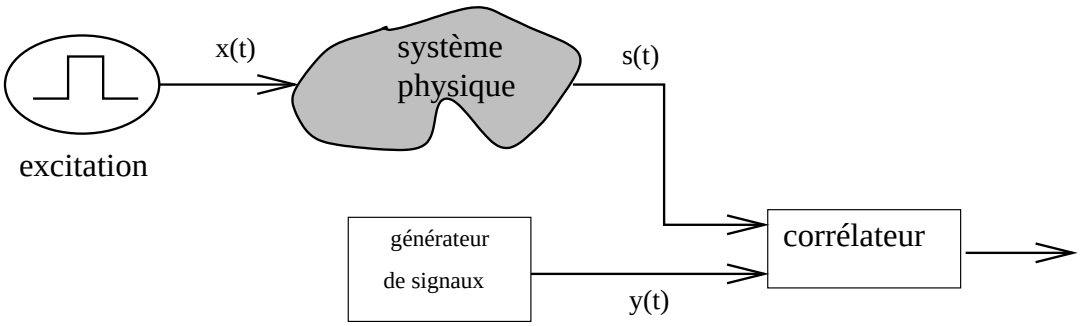


FIGURE 14.86 – Identification d'un système physique par corrélation : dispositif expérimental

1. Calculer l'énergie du signal $y(t)$
2. Le corrélateur permet le calcul de la fonction d'intercorrélation $\Gamma_{ys}(\tau)$ des deux signaux $y(t)$ et $s(t)$ définie par :

$$\Gamma_{ys}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)s(t+\tau)dt. \tag{14.93}$$

   Exprimer $\Gamma_{ys}(\tau)$ en fonction de $\alpha, \beta, A, t_0, \tau$. Montrer qu'elle est maximale pour $\tau = t_0$. Que signifie ce résultat ?
3. Étudier l'évolution de $\Gamma(\tau = t_0)$ en fonction de β. En déduire une méthode qui permettrait de déterminer expérimentalement les constantes A et α.
4. On voudrait réaliser l'opération de convolution par un filtrage linéaire. Quel doit être la réponse impultionnelle du filtre afin que son signal de sortie corresponde bien à $\Gamma_{ys}(\tau)$. Un tel filtre est-il réalisable physiquement. Justifier vos réponses.

Exercice 2 (4 points) : convolution et échantillonnage

Si on considère les signaux $x(t)$ et $h(t)$ échantillonnés sur une période $T_e = 1$ s (Fig.14.87), et que l'on cherche à calculer la convolution numérique entre les deux signaux numériques $x[n]$ et $h[n]$, on peut montrer que cette convolution s'écrit

$$y[n] = (x * h)[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]. \tag{14.94}$$

1. Déterminer l'intervalle où la convolution est non nulle
2. Tracer soigneusement $(x * h)[n]$ en fonction de n

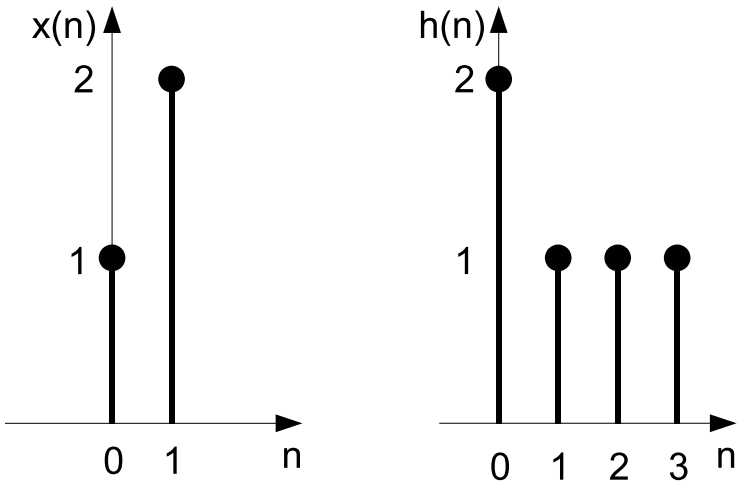


FIGURE 14.87 – Échantillonnage de l'entrée $x(t)$ et de la réponse impultionnelle $h(t)$ pour le calcul de la convolution numérique $y[n]$

Exercice 3 (8 points) : échantillonnage d'un signal modulé en amplitude

On considère un signal modulé en amplitude dont l'expression est la suivante

$$x(t) = X_0 \left(1 + m \sin(2\pi f_m t)\right) \sin(2\pi f_p t), \tag{14.95}$$

avec $X_0 = 10V$, $f_p = 166kHz$, $f_m = 4kHz$, et $m = 0.6$

1. Calculer et représentez le spectre unilatéral (spectre physique) du signal $x(t)$ en prenant soin d'indiquer les unités en dBV. Rappel :

$$dBV = 10 \log \left(\frac{V_s^2}{V_{ref}^2} \right), \tag{14.96}$$

   où $V_{ref} = 1$ Volt RMS ($V_{RMS} = V_{eff}$).

2. Afin d'effectuer une transmission numérique du signal, on propose d'échantillonner $x(t)$ de façon idéale en respectant le critère de Shannon. Calculer la fréquence de Nyquist f_N associée. Combien doit-on prendre d'échantillons par seconde sur ce signal.
3. Avec une fréquence d'échantillonnage f_e inférieure à la fréquence f_N, on relève un spectre (normalisé par rapport à la puissance de la porteuse) donné par la figure 14.88. Expliquer le phénomène observé. En déduire la fréquence f_e en vous appuyant sur une figure soignée.

4. Ce spectre normalisé est-il cohérent vis-à-vis du taux de modulation m. Justifier votre réponse.

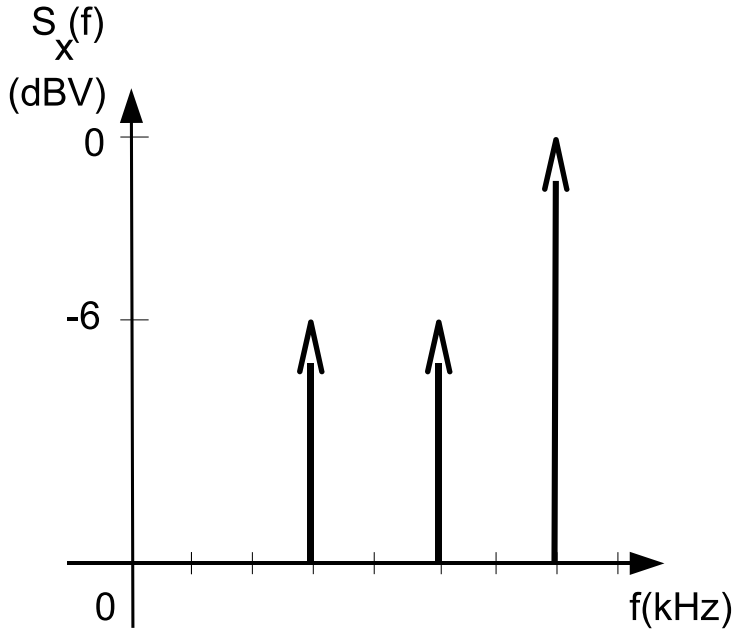


FIGURE 14.88 – Spectre sous-échantillonné (avec repliement de spectre) du signal $x(t)$ modulé en amplitude

Septembre 2014 (3ème et 4ème Année INSA CVL)

Institut National des Sciences Appliquées
Centre Val de Loire
Département Génie des Systèmes Industriels

Rattrapage de Traitement du Signal (TS2)

Mercredi 27 août 2014
Durée : 2 heures

- Les exercices devront être rédigés sur des copies séparées
- Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques
- Aucun document autorisé (polycopié mis à disposition)
- Les téléphones portables ne sont pas autorisés et devront être éteints
- Ce sujet comporte 3 pages dont 1 annexe

Exercice 1 (6 points) : Filtrage de signal aléatoire gaussien

Soit un signal aléatoire gaussien centré $x(t)$ de densité spectrale constante dans la bande $\Delta\nu = [-f_0, f_0]$ et de puissance $\mathcal{P}_x = 0$ dBm, avec $f_0 = 8$MHz.

1. Comment s'appelle ce bruit ? Calculer sa densité spectrale de puissance $S_x(\nu)$
2. Calculer la probabilité pour que $x(t) > 0.4$

On filtre ce signal avec un filtre passe bas idéal de fréquence de coupure $f_0/2$.

1. Calculer la puissance de ce bruit (en dBm)
2. Calculer la probabilité pour que $x(t) > 0.4$

Exercice 2 (7 points) : Corrélation de signaux issus de capteurs

Considérons deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ observés à la sortie de deux capteurs. On suppose qu'ils peuvent être décrits sous la forme

$$x_1(t) = S(t) + N_1(t), \tag{14.97}$$

$$x_2(t) = S(t) + N_2(t), \tag{14.98}$$

où $S(t)$ est un signal déterministe,$N_1(t)$ et $N_2(t)$ sont des bruits blancs centrés, non corrélés et stationnaires. En pratique, $N_1(t)$ et $N_2(t)$ représente le bruit délivré par chaque capteur et $S(t)$ le signal à caractériser.

1. Calculer la fonction d'autocorrélation $\gamma_1(\tau)$ de $x_1(t)$ et $\gamma_2(\tau)$ de $x_2(t)$.
2. Calculer la fonction d'intercorrélation $\gamma_{x_1x_2}(\tau)$ entre $x_1(t)$ et $x_2(t)$.
3. Calculer la fonction d'autocorrélation $\gamma_{yy}(\tau)$ de $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$.
4. Calculer le spectre de puissance du signal $y(t)$. Donner un représentation du spectre physique ($\nu > 0$) sachant que la puissance des signaux $S(t)$, $N_1(t)$ et $N_2(t)$ est respectivement de 10, -10 et -15 dBm.
5. Exprimer le rapport SNR en dB du signal $y(t)$. Le comparer avec celui des signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$; Interpréter expérimentalement le résultat.

Exercice 3 (7 points) : Densité spectrale conjointe de deux bruits

Un générateur de bruit blanc $e(t)$ de densité spectrale $S_e(f)$ alimente le circuit de la figure 14.102. Le transformateur est supposé parfait de rapport 1/2. La sortie $v_2(t)$ résulte du filtrage de $e(t)$ par un passe-bas du deuxième ordre, tandis que la sortie $v_1(t)$ résulte du filtrage de $e(t)$ par un passe-haut du deuxième ordre.

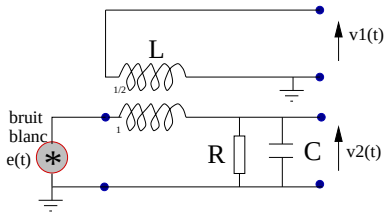


FIGURE 14.89 – Génération de deux bruits corrélés issus d'une même source

1. Calculer les réponses harmoniques $H_{v_1}(\omega)$ et $H_{v_2}(\omega)$ entre l'entrée (de réponse $E(\omega)$) et les deux sorties.
2. En déduire les densités spectrales du bruit filtré $S_{11}(f)$ et $S_{22}(f)$. Tracez les courbes

ANNEXE 1

Intégrale $\Pi(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;1)$

$$\Pi(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{et} \quad \Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Institut National des Sciences Appliquées
Centre Val de Loire
Département Génie des Systèmes Industriels

Rattrapage de Traitement du Signal (TS1)

Lundi 1er septembre 2014
Durée : 2 heures

- Les exercices devront être rédigés sur des copies séparées
- Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques
- Si un élève est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre son travail en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre
- Aucun document autorisé
- Les téléphones portables ne sont pas autorisés et devront être éteints
- Ce sujet comporte 6 pages

Questions de cours (10 points)

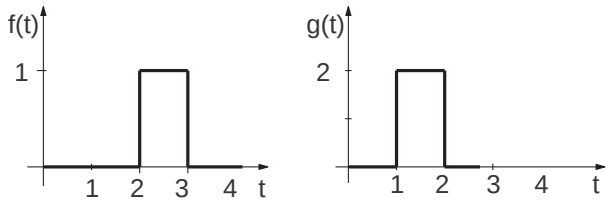
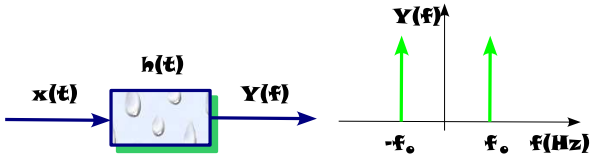
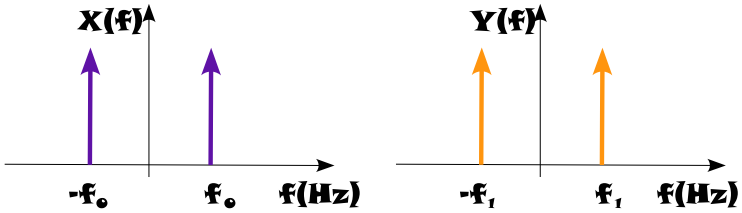


FIGURE 14.90 – Fonctions portes

1. Convolution : Calculer et représenter graphiquement le produit de convolution $\gamma(t)$ des deux fonctions présentées en Fig.14.103
2. Échantillonage : Soit un signal sinusoïdal de 1 MHz échantillonné à 600 kHz. On effectue la FFT de ce signal sur 2000 points avec un oscilloscope numérique. Reproduisez l'affichage de cette FFT.
3. Analyse des systèmes : Déduire $H(f)$ de la réponse $Y(f)$ générée avec $x(t) = \delta(t)$



4. Distribution : Calculer $p(t)$, le produit entre $x(t)$ et $y(t)$.

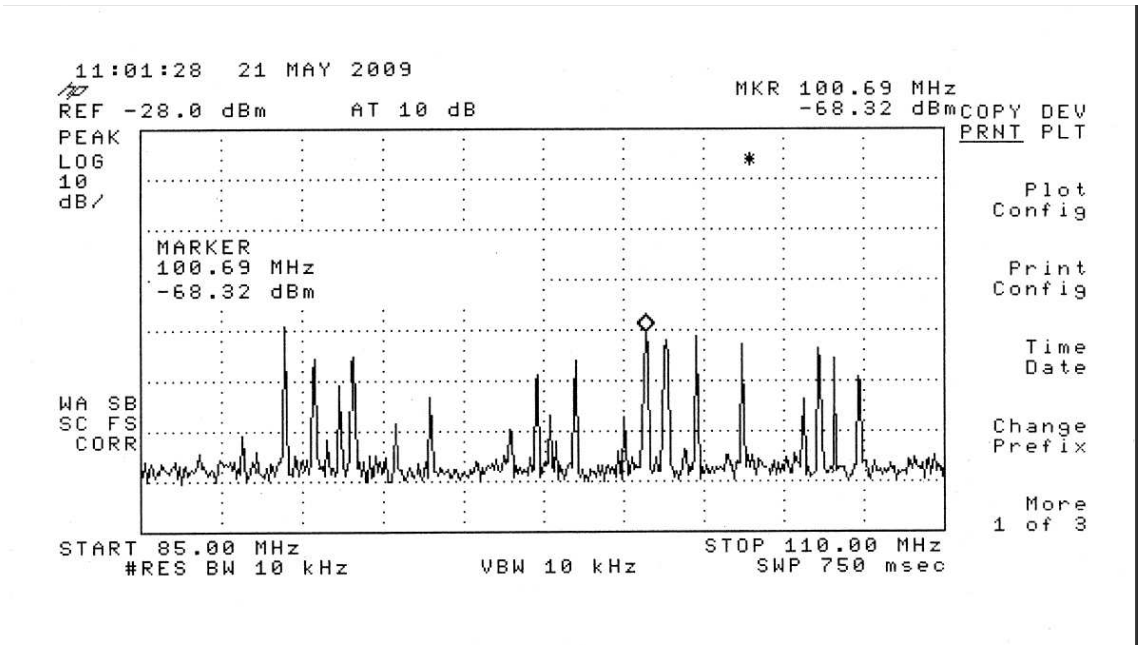


5. Modulation d'amplitude : Soit un signal $s(t) = A\left(1 + m\cos(2\pi f_m t)\right)\cos(2\pi f_0 t)$ modulé en amplitude avec un taux $m \leq 1$.
   (a) Calcul préliminaire (cf TD1) : utiliser la propriété $\delta(t-a) * \delta(t-b) = \delta(t-(a+b))$ pour retrouver la formule trigonométrique $\cos(a)\cos(b) = ...$
   (b) Représenter graphiquement les différentes propriétés de ce signal $s(t)$ dans le domaine spectral et le domaine temporel
   (c) Quelle type de densité spectrale on peut définir avec ce type de signal $s(t)$?

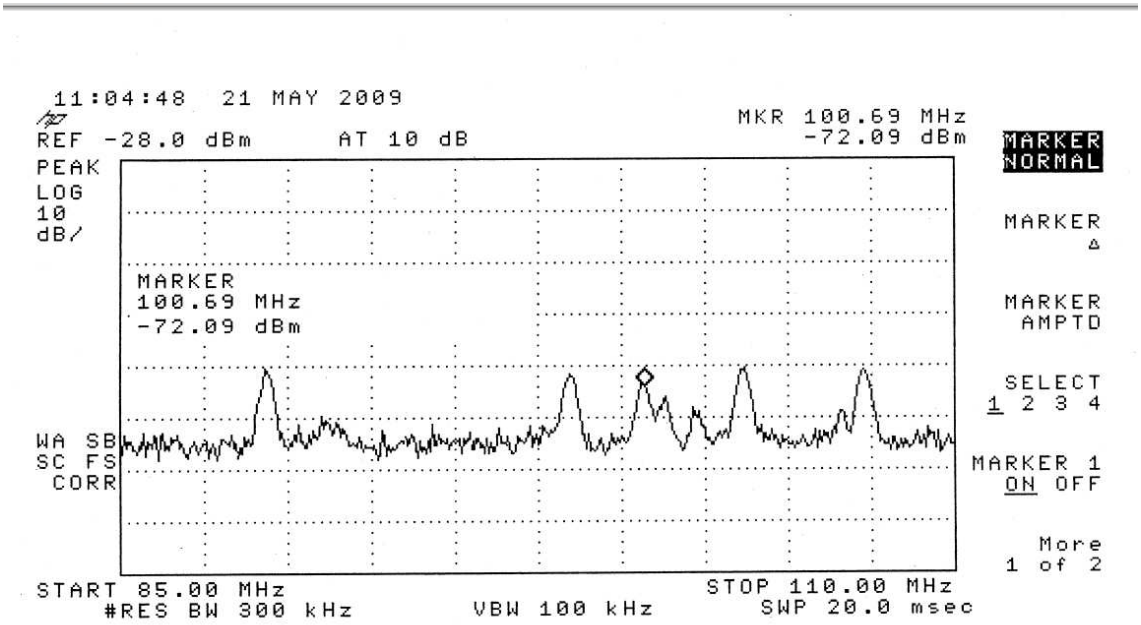
Problème (10 points) : Spectre de réception de la bande FM (d'après Examen TS1 ENIVL (Août 2010)

La bande FM peut être explorée à l'INSA Centre Val de Loire (figure 14.94), campus Blois avec un dispositif de reception et de traitement du signal très sensible. Le spectre mesuré est présenté sur les figures (14.91-14.92) où l'on représente la densité spectrale de puissance $S_x(f)$ d'un signal $x(t)$ en fonction de la fréquence d'analyse f (en MHz), mesurée avec l'analyseur de spectre HP8590 utilisé lors des séances de Travaux Pratiques.

1. Sachant que la sensibilité en ordonnée est de 10 dB/division, identifier, par leur position en fréquence, et à l'aide de la figure 14.91(a) les raies dont la puissance est supérieure à -72 dBm. Pour info, la raie de puissance maximale (-68 dBm) est identifiée par un marqueur (petit losange)
2. La mesure de la puissance est effectuée à partir d'un filtrage du signal $x(t)$ comme présenté en Travaux Pratiques (Figure 14.93) dans une bande dont la résolution BW est indiquée sur les figures (14.91-14.92). Expliquer pourquoi le spectre de la figure 14.91(b) possède des raies plus larges que celles de la figure 14.91a
3. Rappeler le principe fondamental du Traitement du Signal permettant d'expliquer la différence de durée de mesure (appelée SWP)
4. Un agrandissement du spectre dans la bande [100.0 ;102.0] MHz est présenté en figure (14.92). En déduire une valeur précise de la fréquence porteuse des deux raies présentes sur ce spectre et émises par deux stations FM différentes.
5. La figure 14.92(b) présente le spectre $S_x(f)$ mesuré avec une résolution BW de 300 Hz. Évaluer la bande fréquentielle Δf de l'information contenue dans les deux porteuses
6. Préciser, en fonction de ces fréquences, leur nature physique (type d'ondes)
7. Indiquer approximativement, et au regard des deux raies, la station émettant l'information la plus puissante.

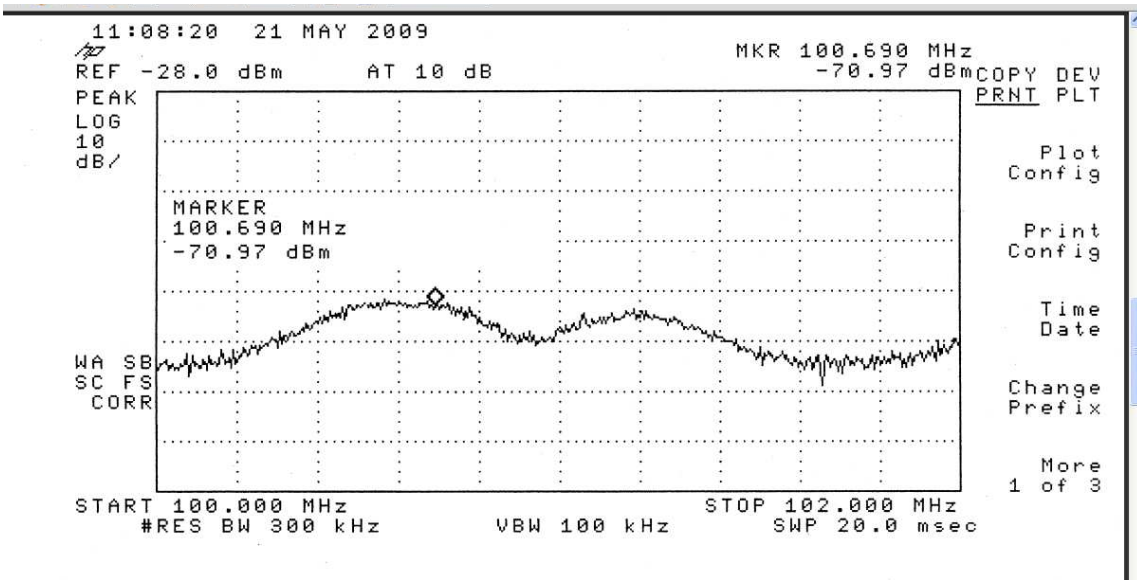


(c) BW= 10 kHz

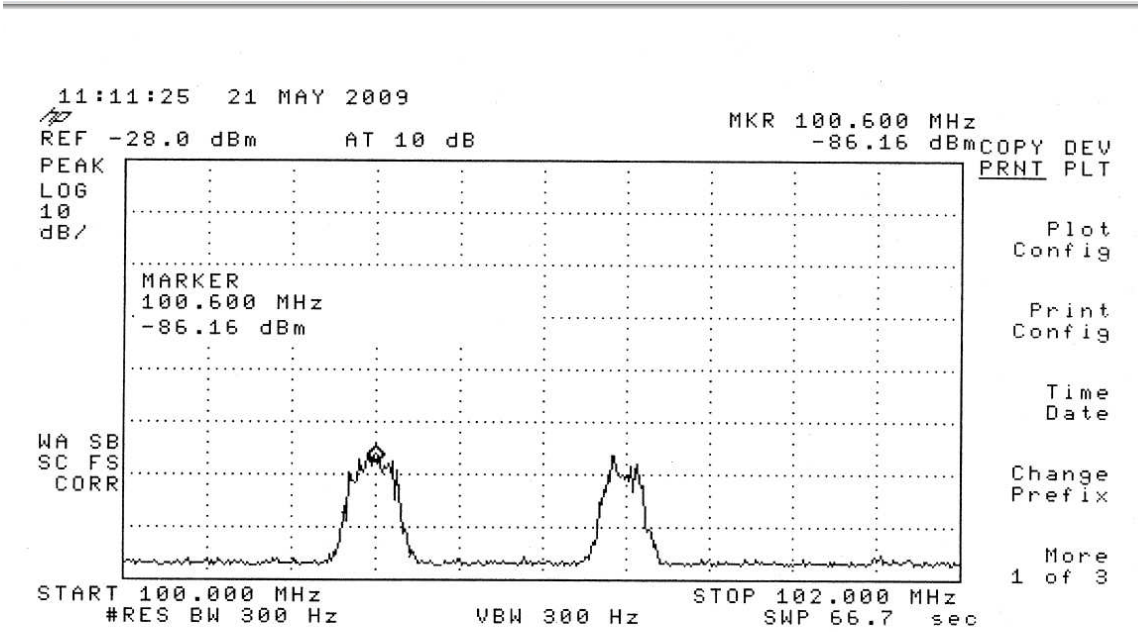


(d) BW= 300 kHz

FIGURE 14.91 – *Densité spectrale de puissance $S_x(f)$ d'un signal $x(t)$ mesurée dans la bande FM 85.0-110.0 MHz avec un analyseur de spectre HP8590*



(a) BW= 300 kHz



(b) BW= 300 Hz

FIGURE 14.92 – *Densité spectrale de puissance $S_x(f)$ d'un signal $x(t)$ mesurée dans la bande FM 100.0-102.0 MHz avec un analyseur de spectre HP8590*

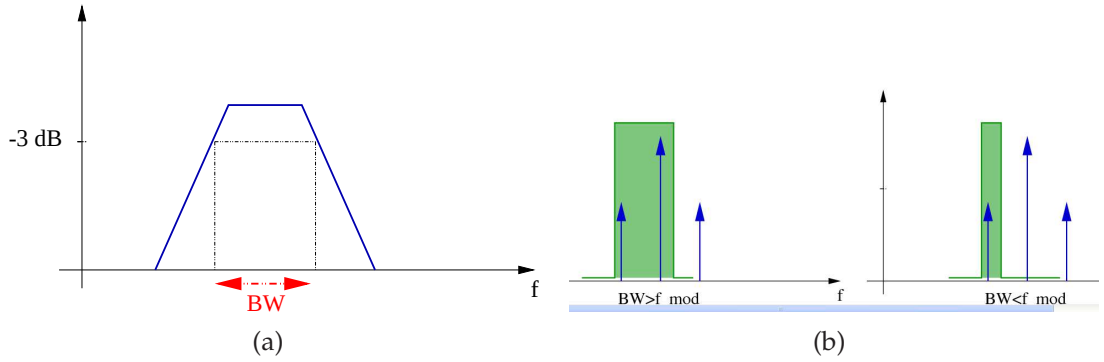


FIGURE 14.93 – *Réponse fréquentielle du filtre analogique définissant le paramètre BW de l'analyseur de spectre HP8590. Dans les analyseurs de spectre analogiques, la bande spectrale d'analyse BW correspond à la largeur du filtre passe bande sélectif centré autour de la fréquence d'analyse f_0 et permet la mesure de la puissance spectrale du signal*

Radio	Frequence	Département	Agglomération
CHERIE FM - BLOIS	91.5	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
EUROPE 1 - BLOIS	106.5	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
FORUM - BLOIS	98.4	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
FRANCE BLEU - BLOIS	93.9	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
FRANCE CULTURE - BLOIS	97.6	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
FRANCE INFO - BLOIS	105.5	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
FRANCE INTER - BLOIS	88.1	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
FRANCE MUSIQUE - BLOIS	92	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
FUN RADIO - BLOIS	100.6	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
NOSTALGIE - BLOIS	101.2	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
NRJ - BLOIS	102.2	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
PLUS FM - BLOIS	89.4	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
RADIO CLASSIQUE - BLOIS	92.8	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
RCF 41 - BLOIS	96.4	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
RMC - BLOIS	107.2	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
RTL - BLOIS	103.6	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
RTL-2 - BLOIS	106	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
STUDIO ZEF - BLOIS	91.1	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
VIBRATION - BLOIS	90.3	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
VIRGIN RADIO - BLOIS	97.2	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
frequence radio BLOIS		toutes les stations radio FM de BLOIS	frequence radio ROMORANTIN
ou encore frequence radio SAINT-ETIENNE		mais aussi frequence radio FIRMINY	

FIGURE 14.94 – *Liste des stations FM sur le secteur de Blois (D'après www.frequence-radio.com)*

Janvier 2015 (4ème Année INSA CVL)

Institut National des Sciences Appliquées
Centre Val de Loire
Département Génie des Systèmes Industriels
Campus de Blois

Examen de Traitement du Signal (TS2)

Vendredi 23 janvier 2015
Durée : 2 heures

- Les exercices devront être rédigés sur des copies séparées
- Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques
- Document autorisé : 1 feuille A4 recto verso avec notes personnelles, formules et résultats (photocopie formellement interdite)
- Documents interdits : annales et correction de cet examen
- Les téléphones portables ne sont pas autorisés et devront être éteints
- Ce sujet comporte 8 pages dont 1 annexe

Exercice 2 (10 points) : fonction de cohérence de deux bruits

La densité interspectrale de puissance $S_{xy}(\nu)$ de deux signaux, transformée de Fourier (TF) de la fonction d'intercorrélation $\gamma_{xy}(\tau)$, met en évidence l'interaction des deux signaux en représentation fréquentielle. Toutefois, de même que l'on définit la covariance normalisée pour mieux mettre en évidence les interactions en représentation temporelle, on préfère, en représentation fréquentielle, utiliser la fonction de cohérence.

La fonction de cohérence $\Gamma_{xy}(\nu)$ de deux signaux aléatoires $x(t,s)$ et $y(t,s)$ stationnaires est donnée par

$$\Gamma_{xy}(\nu) = \frac{|S_{xy}(\nu)|^2}{S_y(\nu)S_x(\nu)}, \tag{14.99}$$

où $y(t,s)$ est le filtrage d'un signal $x(t,s)$ à travers un filtre de réponse $H(\nu)$, $S_x(\nu)$ le spectre du signal $x(t,s)$, $S_y(\nu)$ le spectre du signal $y(t,s)$, et $S_{xy}(\nu) = \overline{H(\nu)}S_x(\nu)$.

Soit un signal aléatoire $x(t,s)$, transformé par un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ en un signal $y(t,s)$. Le signal $y(t,s)$ est mesuré à l'aide d'un capteur C_1 qui possède un bruit propre aléatoire $n(t,s)$, de sorte que le signal de mesure $v(t,s) = y(t,s) + n(t,s)$, où les signaux sont stationnaires d'ordre 2, centrés et indépendants.

1. Calculer la fonction d'intercorrélation $\gamma_{vx}(\tau)$. En déduire $S_{xy}(\nu)$ en prenant soin de rappeler le théorème utilisé
2. Calculer la fonction d'autocorrélation $\gamma_v(\tau)$. En déduire $S_v(\nu)$
3. Exprimer la fonction de cohérence $\Gamma_{vx}(\nu)$ en fonction de $H(\nu)$, et des spectres $S_x(\nu)$ et $S_n(\nu)$, puis en fonction de $S_n(\nu)$ et $S_y(\nu)$ seuls.
4. Dans quel intervalle varie $\Gamma_{vx}(\nu)$, en fonction des propriétés de $S_x(\nu)$ et de $S_n(\nu)$
5. On suppose que le signal $x(t,s)$ est également mesuré à l'aide d'un capteur C_2 qui possède un bruit propre centré $m(t,s)$, de sorte que le signal mesuré soit $u(t,s) = x(t,s) + m(t,s)$, où les signaux sont stationnaires d'ordre 2, centrés et indépendants. Montrer, par un calcul analogue au 3), que la fonction de cohérence $\Gamma_{uv}(\nu)$ est donnée par

$$\Gamma_{uv}(\nu) = \frac{1}{\left(1 + \frac{S_m(\nu)}{S_x(\nu)}\right)\left(1 + \frac{S_n(\nu)}{S_y(\nu)}\right)}. \tag{14.100}$$

Exercice 2 (10 points) : filtrage linéaire de signaux gaussien et uniforme

Considérons deux bruits blancs de tensions $b_1(t)$ et $b_2(t)$ représentés en Fig.14.95 dont on cherche à évaluer les propriétés statistiques et spectrales :

- moyenne
- variance
- distribution statistique : l'une est gaussienne et l'autre est uniforme
- densité spectrale de puissance

Afin d'étudier ces deux bruits $b_1(t)$ et $b_2(t)$, ils ont été enregistrés sur une durée d'environ 1,6ms et échantillonnés à la fréquence f_e. On a pu relever les informations (de dépassement) statistiques suivantes :

- sur les $N = 2^n$ points du signal $b_1(t)$ échantillonné, on a 11443 valeurs de la tension inférieures à 5 Volts
- sur les $N = 2^n$ points du signal $b_2(t)$ échantillonné, on a 10666 valeurs de la tension inférieures à 5 Volts

Afin de diminuer la valeur de la probabilité de dépassement de la valeur seuil de 5 Volts, on a filtré les signaux $b_1(t)$ et $b_2(t)$ à l'aide d'un filtre numérique passe bas de type Butterworth d'ordre 10 et d'un algorithme de suppression de la composante continue. Les deux bruits filtrés $b_1^{(f)}$ et $b_2^{(f)}$ sont représentés en Fig.14.96. De la même manière que précédemment, on a pu relever les informations statistiques suivantes :

- sur les $N = 2^n$ points du signal $b_1^{(f)}$ échantillonné, on a 15971 valeurs de la tension inférieures à 5 Volts
- sur les $N = 2^n$ points du signal $b_2^{(f)}$ échantillonné, on a 14305 valeurs de la tension inférieures à 5 Volts

Enfin, et afin d'effectuer une analyse spectrale des signaux, nous avons appliqué une FFT sur la totalité des $N = 2^n$ points. La figure 14.97 représente les spectres FFT des bruits filtrés et non filtrés. Afin de normaliser l'amplitude de la FFT, exprimée en unité logarithmique arbitraire (u.a.), nous avons également tracé la FFT d'un signal sinusoïdal d'amplitude $A = 1V$ et de fréquence $f_0 = 350kHz$.

Questions préliminaires (signaux non filtrés)

Évaluer, en justifiant vos réponses, les données suivantes :

1. la fréquence d'échantillonnage f_e du signal, à travers l'examen de la figure 14.97
2. le nombre de points $N = 2^n$ de chaque signal (puissance de 2)
3. la durée exacte de chaque signal
4. l'unité d'affichage du module de la FFT (dBm, dBV, ou dB) en vérifiant l'amplitude de la FFT du signal sinusoïdal

À partir des seules courbes de la figure 14.95, justifier si l'on peut évaluer les caractéristiques suivantes : valeur moyenne, variance, distribution et bande passante du bruit.

Étude des signaux non filtrés

La statistique des deux bruits non filtrés montrent que les écarts-types sont évalués à $\sigma_{b_1} = 5,81$ Volts et $\sigma_{b_2} = 9,97$ Volts.

1. Calculer la probabilité $P(b_1(t) < 5)$ en considérant les deux cas suivants : distribution gaussienne et distribution uniforme

2. Comparez avec les informations statistiques de dépassement de la valeur de 5V et vérifiez la valeur de la composante continue
3. Calculer la probabilité $P(b_2(t) < 5)$ en considérant les deux cas suivant : distribution gaussienne et distribution uniforme
4. Comparez avec les informations statistiques de dépassement de la valeur de 5V et calculer la valeur de la composante continue en supposant l'information de dépassement exacte

Pour chaque bruit (supposé blanc), évaluer la fréquence de coupure à partir des données spectrale de la FFT. Conclure !

Étude des signaux filtrés

On considère dans cette partie les bruits filtrés $b_1^{(f)}$ et $b_2^{(f)}$. La statistique des deux bruits filtrés montrent que $\sigma_{b_1^{(f)}} = 2,52$ Volts et $\sigma_{b_2^{(f)}} = 4,3$ Volts.

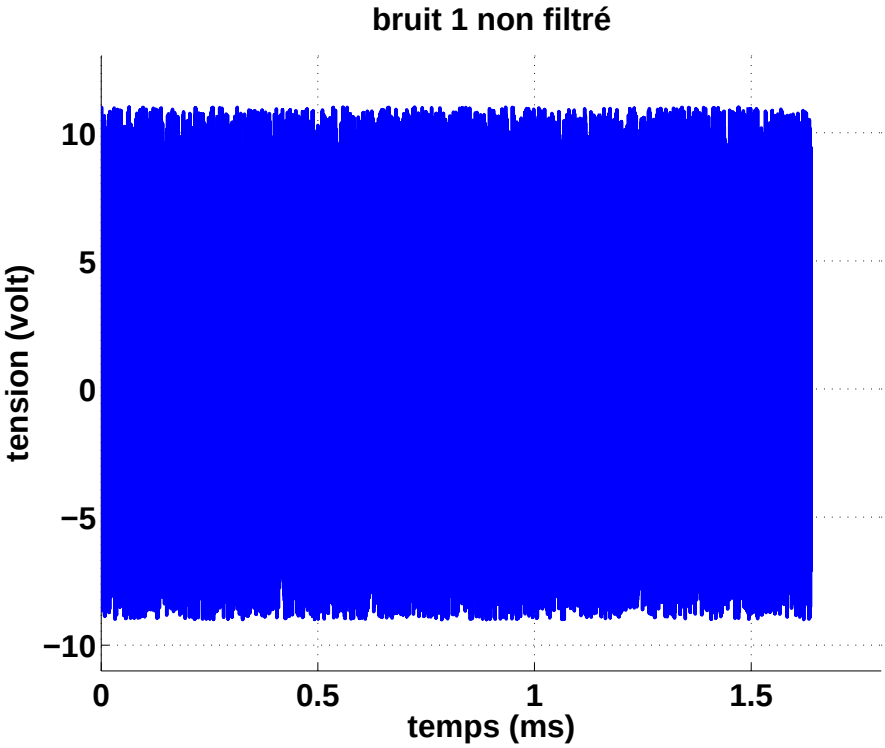
1. Évaluer la fréquence de coupure des bruits filtrés. En déduire la valeur de la densité spectrale de puissance
2. Calculer la probabilité $P(b_1^{(f)} < 5)$ et $P(b_2^{(f)} < 5)$ en considérant les deux cas suivant : distribution gaussienne et distribution uniforme. Interprétez le résultat

ANNEXE

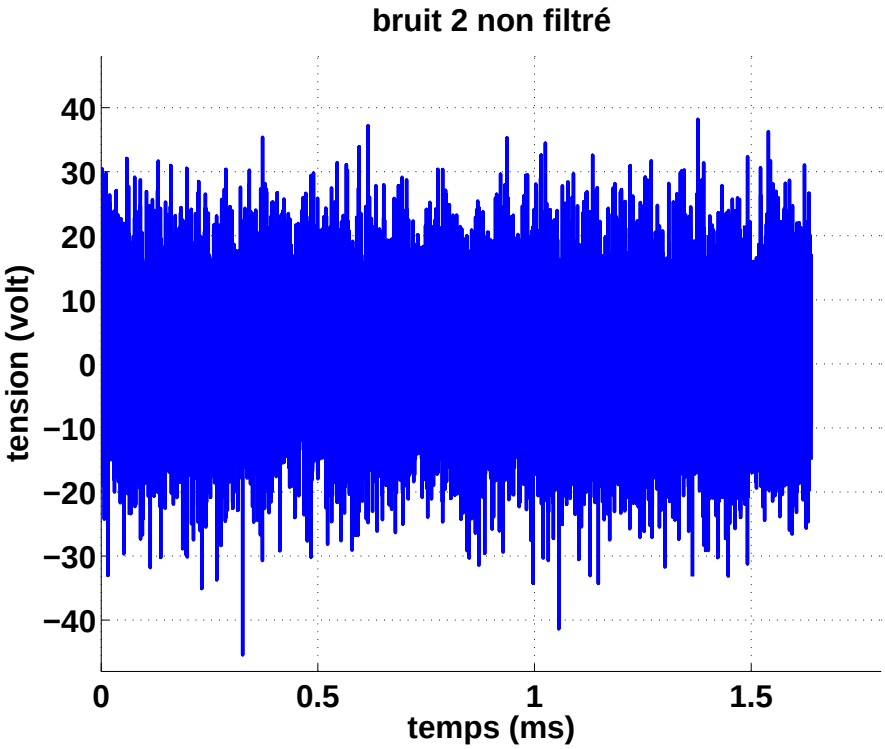
Intégrale $\Pi(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;1)$

$$\Pi(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{et} \quad \Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

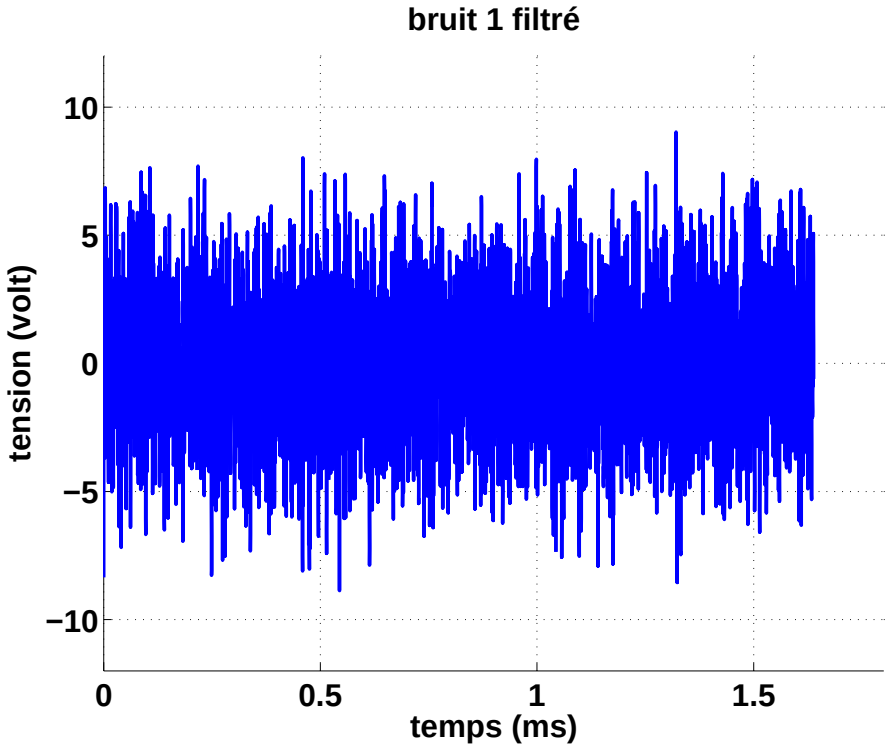


(a) $b_1(t)$

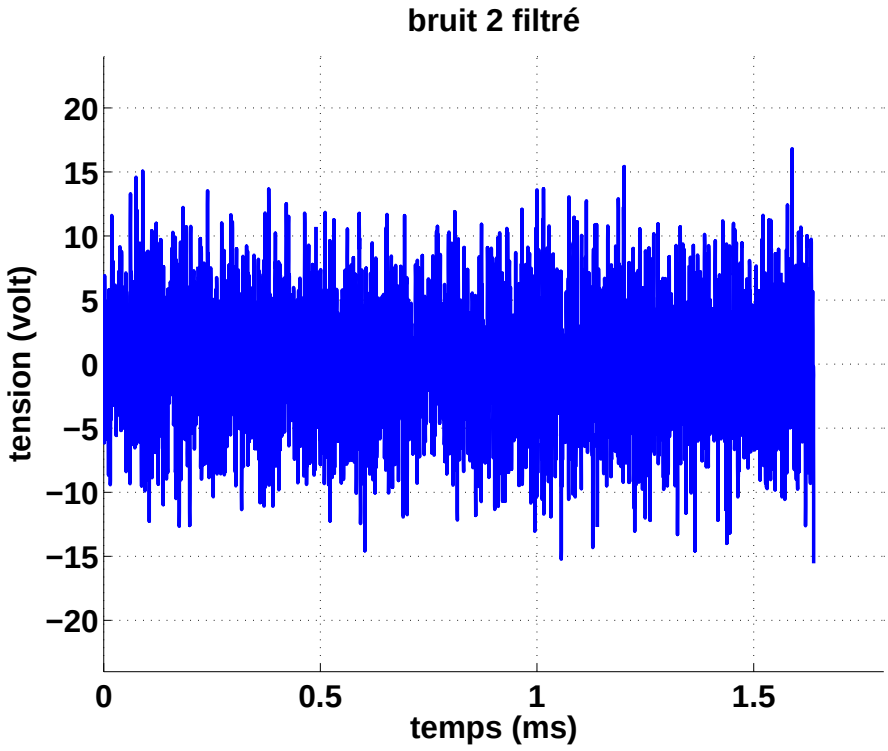


(b) $b_2(t)$

FIGURE 14.95 – Bruits de tension $b_1(t)$ et $b_2(t)$ non filtrés

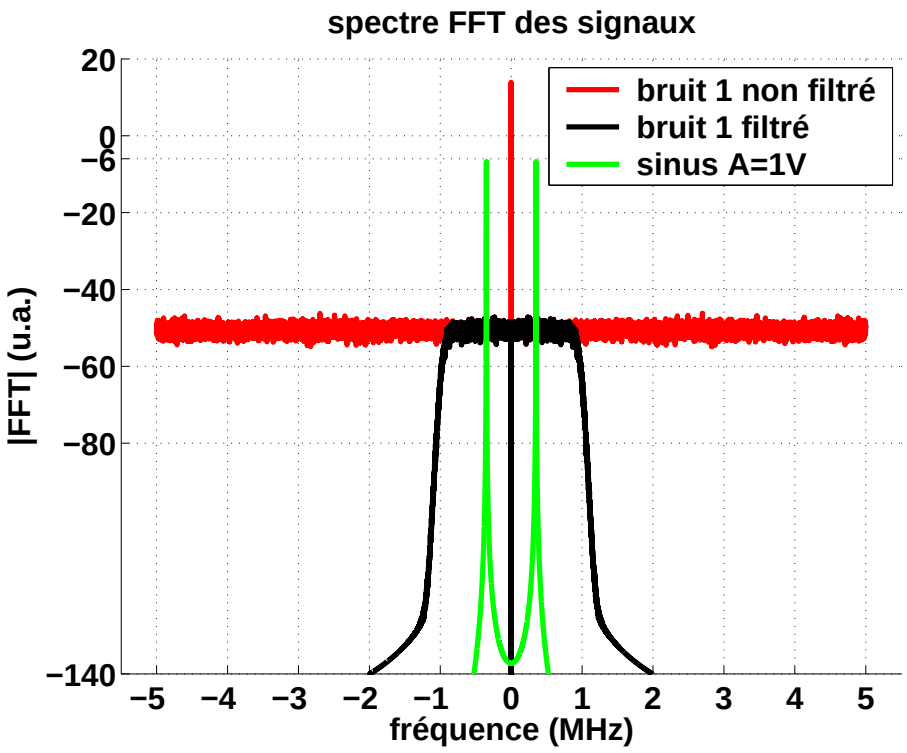


(a) $b_1^{(f)}(t)$

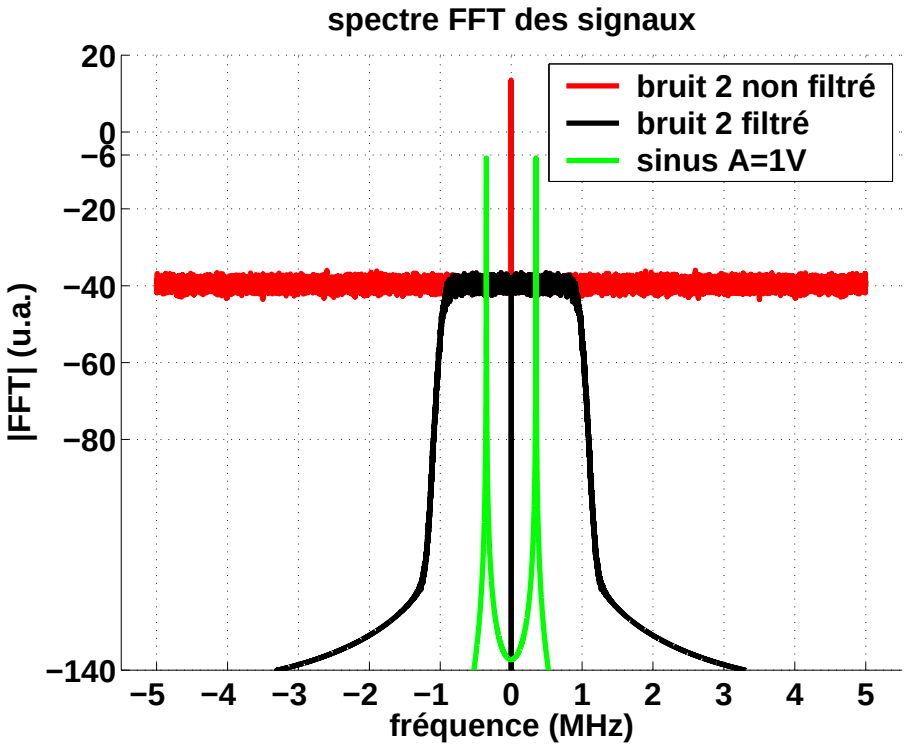


(b) $b_2^{(f)}(t)$

FIGURE 14.96 – *Bruits de tension $b_1^{(f)}(t)$ et $b_2^{(f)}(t)$ filtrés*



(a)



(b)

FIGURE 14.97 – *FFT des 2 bruits de tension et du signal sinusoïdal d'amplitude $A = 1V$ et de fréquence $f_0 = 350kHz$ permettant ainsi la normalisation (ou étalonnage) de la FFT*

Mai 2015 (3ème Année INSA CVL)

Institut National des Sciences Appliquées
Centre Val de Loire - Blois - Bourges
Département Génie des Systèmes Industriels

Examen de Traitement du Signal (TS1)

Vendredi 29 mai 2015
Durée : 2 heures

- Les exercices devront être rédigés sur des copies séparées
- Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques
- Document autorisé : 1 feuille A4 recto verso avec notes personnelles, formules et résultats (photocopie formellement interdite)
- Documents interdits : annales et correction de cet examen
- Les téléphones portables et les calculatrices ne sont pas autorisés et devront être éteints
- Ce sujet comporte 6 pages. Le barème proposé est indicatif

Problème (12 points) : Zoom fréquentiel pour signaux déterministes

À l'INSA Campus de Blois, la bande FM peut être explorée avec un dispositif de réception et de traitement du signal très sensible. Le spectre mesuré est présenté sur les figures 14.98(a) et (b) où l'on représente la densité spectrale de puissance $S_y(f)$ du signal reçu $y(t)$ en fonction de la fréquence d'analyse f (en MHz), mesurée avec l'analyseur de spectre HP8590 utilisé lors des séances de Travaux Pratiques. Comme on peut le constater sur les figures, $S_y(f)$ est constitué de la somme de n raies $X^i(\nu)$ que l'on supposera avoir la forme d'une fonction triangle centrée sur la porteuse de la station FM. La liste des porteuses FM émises sur le secteur de Blois est donnée dans le tableau de la figure 14.99.

L'objectif de ce problème est d'étudier un système électronique d'instrumentation analogique permettant de réaliser le processus "**zoom fréquentiel**" appliqué à la raie d'émission $X^{FUN}(\nu)$ de la station FUN RADIO (100.6 MHz) de façon à ce que l'on puisse obtenir la figure 14.98(b) à partir de la figure 14.98(a). Pour ce faire, on considère un signal déterministe à énergie finie à valeurs réelles noté $x(t)$ de transformée de Fourier :

$$X(\nu) = A\left(\wedge_{2F}(\nu - f_0) + \wedge_{2F}(\nu + f_0)\right), \tag{14.101}$$

où $\wedge_{2F}(\nu)$ est une fonction triangle, d'amplitude maximale égale à 1, centrée, et de support borné non nul de largeur $2F$, et $0 < F < f_0$. On notera que $X(\nu)$ est une fonction paire.

1. À l'aide d'un multiplicateur analogique, on élabore le signal complexe

$$x_1(t) = x(t)\exp\left(-2\imath\pi f_0 t\right). \tag{14.102}$$

   Déterminer la transformée de Fourier (TF) de $x_1(t)$, notée $X_1(\nu)$.

2. On filtre le signal $x_1(t)$ à l'aide d'un filtre passe bas idéal de façon à ne conserver que la partie du spectre de $x_1(t)$ associée aux fréquences vérifiant $|\nu| < F$. Déterminer le signal résultant noté $x_2(t)$. (Rappel de TF : $\wedge_B(\nu) \rightleftharpoons Bsinc^2(\pi Bt)$)

3. Le signal $x_2(t)$ est comprimé temporellement de manière à obtenir

$$x_3(t) = x_2(Mt) \text{ avec } M > 1. \tag{14.103}$$

   Expliquer pourquoi l'opération qui fait passer de $x_2(t)$ à $x_3(t)$ peut être qualifiée de compression. Montrer que la transformée de Fourier de $x_3(t)$ est donnée par $X_3(\nu) = \frac{A}{M}\wedge_{2F}\left(\frac{\nu}{M}\right)$.

4. Pour terminer le processus, on module le signal $x_3(t)$ de manière à générer

$$x_4(t) = x_3(t)\exp\left(2\imath\pi f_0 t\right). \tag{14.104}$$

   Déterminer la transformée de Fourier de $x_4(t)$, notée $X_4(\nu)$.

5. Représenter graphiquement $X(\nu)$, $X_1(\nu)$, $X_2(\nu)$, $X_3(\nu)$, $X_4(\nu)$. Pour toutes ces représentations graphiques, on prendra $f_0 = 100.6$MHz et $2F = 400$kHz.

6. Expliquer pourquoi l'opération qui transforme $x(t)$ en $x_4(t)$ peut être qualifiée de **zoom fréquentiel**.

7. Calculer le coefficient M de façon à ce que la figure 14.98(a) soit une représentation de $X(\nu)$, et que la figure 14.98(b) soit une représentation de $X_4(\nu)$.

Exercice 1 (5 points) : Convolution de fonctions portes

Soit les deux fonctions réelles du temps $f(t)$ et $g(t)$ dont on veut déterminer la convolution $y(t) = f(t) * g(t)$ (Fig.14.100).

1. Rappeler l'expression de la convolution de deux portes $\Pi_\tau(t)$
2. Exprimer $f(t)$ et $g(t)$ sous la forme de la somme de deux distributions translatées
3. Déterminer intervalle de temps sur lequel la valeur de $y(t)$ est non nulle
4. Déterminer le ou les instant(s) où $y(t)$ atteint son maximum
5. Calculer $y(t)$ et donner son l'allure graphique

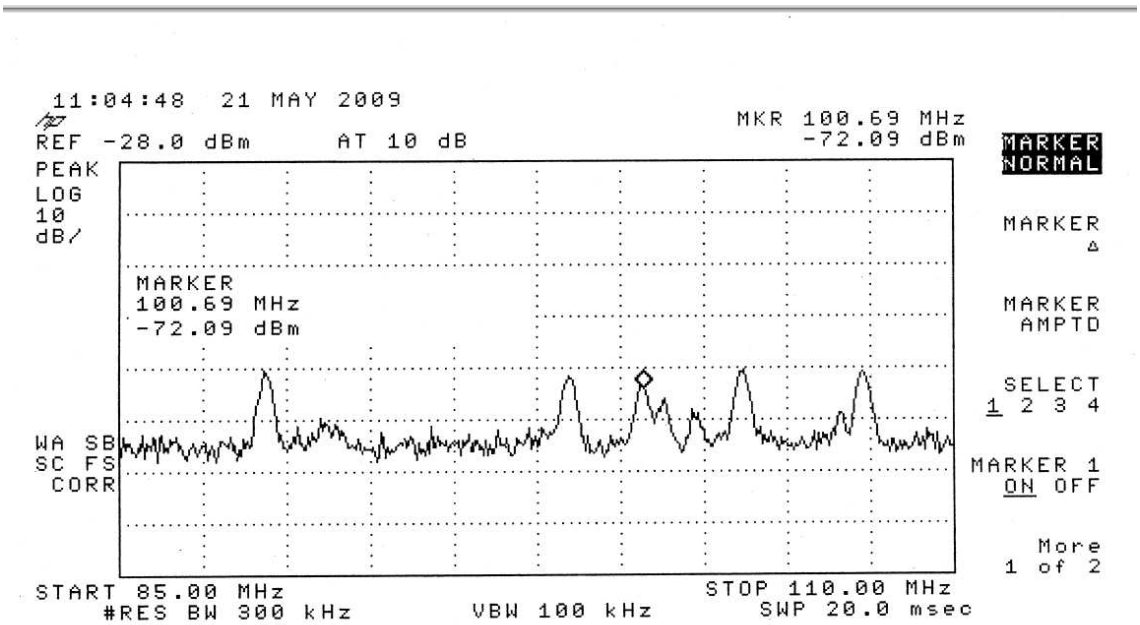
Exercice 2 (3 points) : Propriétés spectrales de signaux

Soit le signal $x(t)$ représenté en Fig.14.101 et $X(\nu) = A(\nu) + jB(\nu)$ sa Transformée de Fourier (TF). Calculer ou justifier les quantités suivantes :

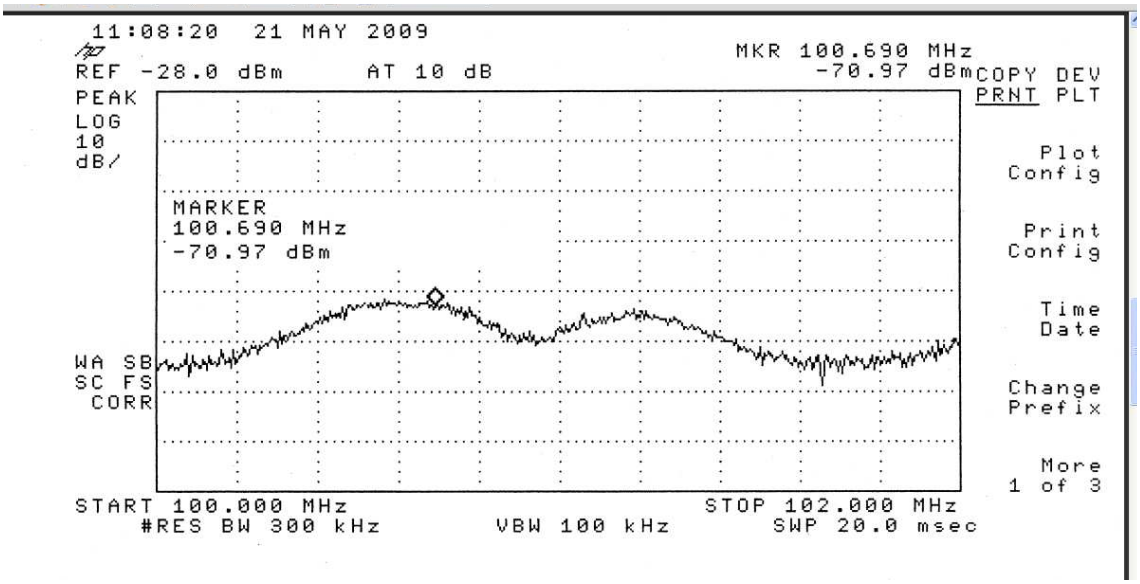
1. $X(0)$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 d\nu$
3. En utilisant les propriétés de symétries hermitiques (Tab.14.7), on se propose de donner l'allure de la TF inverse de $A(\nu)$. Dans un premier temps, calculer (ou rappeler) la TF de la fonction $x(-t)$ en fonction de $X(\nu)$. Dans un deuxième temps, exprimer $A(\nu)$ en fonction des TF de $x(t)$ et de $x(-t)$. Enfin, représenter graphiquement, en fonction du temps, l'allure de la TF inverse de $A(\nu)$

Fonction $x(t)$	Transformée de Fourier $X(\nu)$
réelle	complexe (partie réelle paire et partie imaginaire impaire)
réelle paire	réelle paire
réelle impaire	imaginaire impaire
imaginaire	complexe (partie réelle impaire, partie imaginaire paire)
imaginaire paire	imaginaire paire
imaginaire impaire	réelle impaire

TABLE 14.7 – *Symétries hermitiques et propriétés de la Transformée de Fourier (TF)*



(a) SPAN = 25 MHz



(b) SPAN = 2 MHz

FIGURE 14.98 – *Densité spectrale de puissance $S_y(f)$ du signal $y(t)$ mesurée dans la bande FM 85.0-110.0 MHz (a), puis dans la bande FM 100.0-102.0 MHz (b) avec un analyseur de spectre analogique de type HP8590*

Radio	Frequence	Département	Agglomération
CHERIE FM - BLOIS	91.5	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
EUROPE 1 - BLOIS	106.5	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
FORUM - BLOIS	98.4	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
FRANCE BLEU - BLOIS	93.9	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
FRANCE CULTURE - BLOIS	97.6	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
FRANCE INFO - BLOIS	105.5	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
FRANCE INTER - BLOIS	88.1	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
FRANCE MUSIQUE - BLOIS	92	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
FUN RADIO - BLOIS	100.6	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
NOSTALGIE - BLOIS	101.2	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
NRJ - BLOIS	102.2	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
PLUS FM - BLOIS	89.4	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
RADIO CLASSIQUE - BLOIS	92.8	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
RCF 41 - BLOIS	96.4	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
RMC - BLOIS	107.2	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
RTL - BLOIS	103.6	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
RTL-2 - BLOIS	106	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
STUDIO ZEF - BLOIS	91.1	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
VIBRATION - BLOIS	90.3	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
VIRGIN RADIO - BLOIS	97.2	41 - Loir-et-Cher	BLOIS
frequence radio BLOIS		toutes les stations radio FM de BLOIS	frequence radio ROMORANTIN
ou encore frequence radio SAINT-ETIENNE		mais aussi frequence radio FIRMINY	

FIGURE 14.99 – *Liste des stations FM sur le secteur de Blois (D'après www.frequence-radio.com)*

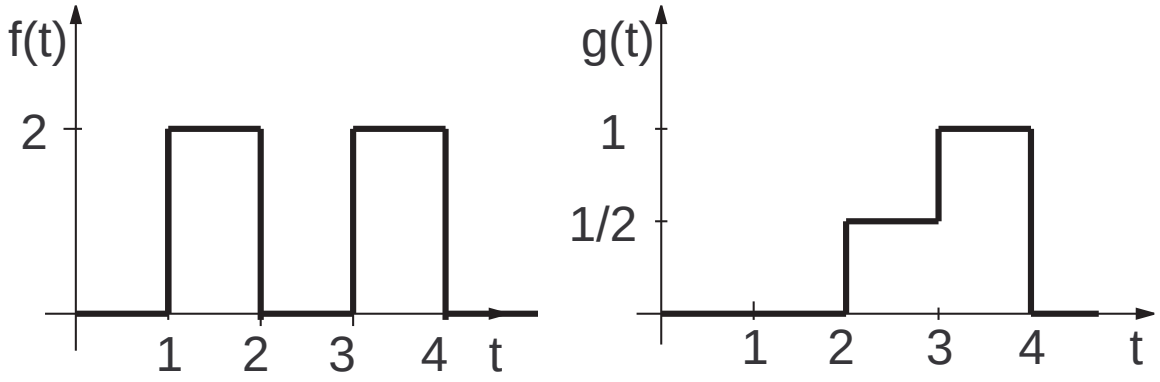


FIGURE 14.100 – *Représentation temporelle des signaux $f(t)$ et $g(t)$*

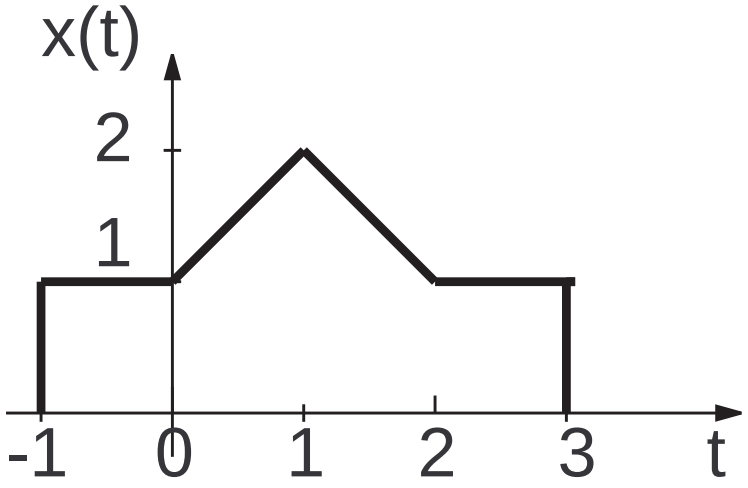


FIGURE 14.101 – *Signal temporel*

Septembre 2015 (4ème Année INSA CVL)

Institut National des Sciences Appliquées
Centre Val de Loire, Campus de Blois
Département Génie des Systèmes Industriels

Rattrapage de Traitement du Signal (TS2)

Mercredi 26 août 2015
Durée : 2 heures (30mn+1h30mn)

- Les exercices devront être rédigés sur des copies séparées. Les questions de cours doivent être traitées en premier (30 mn). Ensuite, deux exercices parmi les trois proposés seront traités durant 1h30
- Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques
- Si un élève est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre son travail en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre
- Aucun document autorisé (polycopié mis à disposition pour la deuxième partie)
- Les téléphones portables ne sont pas autorisés et devront être éteints
- Ce sujet comporte 4 pages dont une annexe et une figure

Questions de cours (6 points) - 30 mn sans polycopié

Exercice 1 : Tracer, pour le bruit blanc gaussien et le bruit blanc uniforme, les fonctions suivantes : densité spectrale de puissance, fonction d'autocorrélation, densité de probabilité

Exercice 2 : Soit un bruit blanc gaussien filtré ($f_{max} = 1MHz$) et de variance 4 $(mV)^2$. On veut réduire la puissance de ce bruit avec un filtre passe bas. Quelle doit être la fréquence de coupure de ce filtre pour avoir une variance de 2 $(mV)^2$

Exercice 1 (7 points) : Filtrage de signal aléatoire gaussien

Soit un signal aléatoire gaussien centré $x(t)$ de densité spectrale constante dans la bande $\Delta\nu = [-f_0, f_0]$ et de puissance $\mathcal{P}_x = 0$ dBm, avec $f_0 = 8$MHz.

1. Comment s'appelle ce bruit ? Calculer sa densité spectrale de puissance $S_x(\nu)$
2. Calculer la probabilité pour que $x(t) > 0.4$

On filtre ce signal avec un filtre passe bas idéal de fréquence de coupure $f_0/2$.

3. Calculer la puissance de ce bruit (en dBm)
4. Calculer la probabilité pour que $x(t) > 0.4$

Exercice 2 (7 points) : Corrélation de signaux issus de capteurs

Considérons deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ observés à la sortie de deux capteurs. On suppose qu'ils peuvent être décrits sous la forme

$$x_1(t) = S(t) + N_1(t), \tag{14.105}$$

$$x_2(t) = S(t) + N_2(t), \tag{14.106}$$

où $S(t)$ est un signal déterministe,$N_1(t)$ et $N_2(t)$ sont des bruits blancs centrés, non corrélés et stationnaires. En pratique, $N_1(t)$ et $N_2(t)$ représente le bruit délivré par chaque capteur et $S(t)$ le signal à caractériser.

1. Calculer la fonction d'autocorrélation $\gamma_1(\tau)$ de $x_1(t)$ et $\gamma_2(\tau)$ de $x_2(t)$.
2. Calculer la fonction d'intercorrélation $\gamma_{x_1x_2}(\tau)$ entre $x_1(t)$ et $x_2(t)$.
3. Calculer la fonction d'autocorrélation $\gamma_{yy}(\tau)$ de $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$.
4. Calculer le spectre de puissance du signal $y(t)$. Donner un représentation du spectre physique ($\nu > 0$) sachant que la puissance des signaux $S(t)$, $N_1(t)$ et $N_2(t)$ est respectivement de 10, -10 et -15 dBm.

Exercice 3 (7 points) : Densité spectrale conjointe de deux bruits

Un générateur de bruit blanc $e(t)$ de densité spectrale $S_e(f)$ alimente le circuit de la figure 14.102. Le transformateur est supposé parfait de rapport 1/2. La sortie $v_2(t)$ résulte du filtrage de $e(t)$ par un passe-bas du deuxième ordre, tandis que la sortie $v_1(t)$ résulte du filtrage de $e(t)$ par un passe-haut du deuxième ordre.

1. Calculer les réponses harmoniques $H_{v_1}(\omega)$ et $H_{v_2}(\omega)$ entre l'entrée (de réponse $E(\omega)$) et les deux sorties.
2. En déduire les densités spectrales du bruit filtré $S_{11}(f)$ et $S_{22}(f)$. Tracez les courbes

ANNEXE 1

Intégrale $\Pi(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;1)$

$$\Pi(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{et} \quad \Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

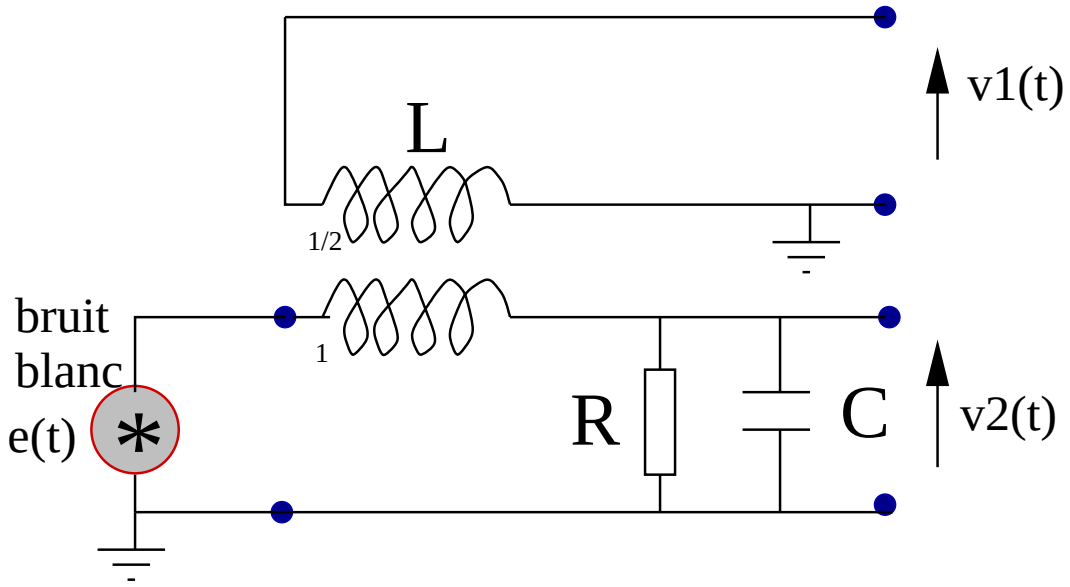


FIGURE 14.102 – *Génération de deux bruits corrélés issus d'une même source*

Septembre 2015 (3ème Année INSA CVL)

Institut National des Sciences Appliquées
Centre Val de Loire, Campus de Blois
Département Génie des Systèmes Industriels

Rattrapage de Traitement du Signal (TS1)

Mercredi 26 août 2015
Durée : 2 heures

- Les exercices devront être rédigés sur des copies séparées
- Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques
- Si un élève est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre son travail en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre
- Aucun document autorisé (polycopié mis à disposition)
- Les téléphones portables ne sont pas autorisés et devront être éteints
- Ce sujet comporte 4 pages

Questions de cours (10 points)

1. Convolution : Calculer et représenter graphiquement le produit de convolution $\gamma(t)$ des deux fonctions présentées en figure 14.103

2. Échantillonage : Soit un signal sinusoïdal de 2 MHz échantillonné à 800 kHz. On effectue la FFT de ce signal sur 2000 points avec un oscilloscope numérique. Reproduisez l'affichage de cette FFT.

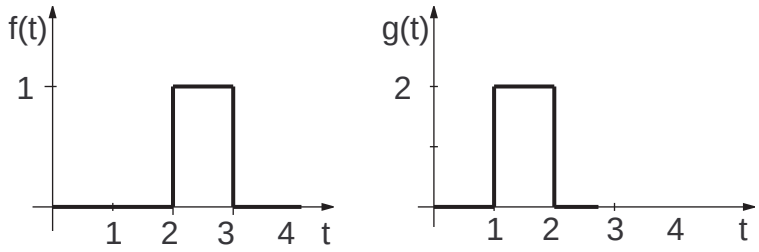


FIGURE 14.103 – Fonctions portes

3. Analyse des systèmes (figure 14.104) : Déduire $H(f)$ de la réponse $Y(f)$ générée avec $x(t) = \delta(t)$

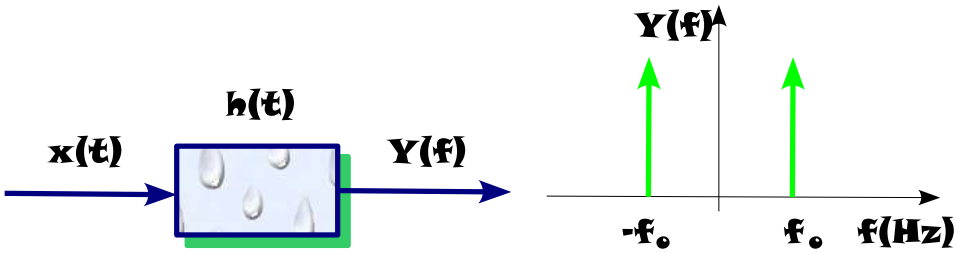


FIGURE 14.104 – *Analyse des systèmes*

4. Distribution : Calculer $p(t)$, le produit entre $x(t)$ et $y(t)$, sachant que $X(f)$ et $Y(f)$ sont représentées en figure 14.105.

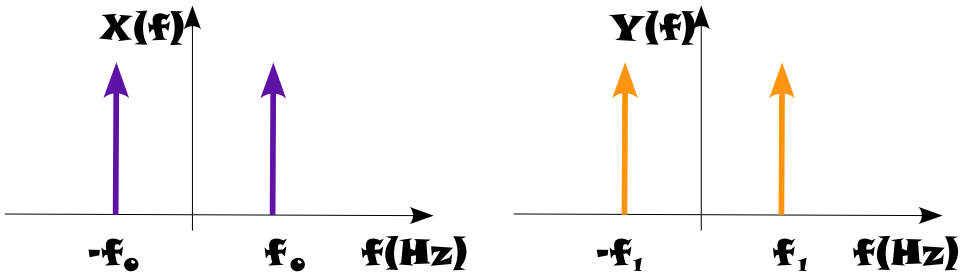


FIGURE 14.105 – *Distribution*

5. Modulation d'amplitude : Soit un signal $s(t) = A\left(1 + m\cos(2\pi f_m t)\right)\cos(2\pi f_0 t)$ modulé en amplitude avec un taux $m \leq 1$.

   (a) Calcul préliminaire (cf TD1) : utiliser la propriété $\delta(t-a) * \delta(t-b) = \delta(t-(a+b))$ pour retrouver la formule trigonométrique $\cos(a)\cos(b) = ...$

(b) Représenter graphiquement les différentes propriétés de ce signal $s(t)$ dans le domaine spectral et le domaine temporel

(c) Quelle type de densité spectrale on peut définir avec ce type de signal $s(t)$?

Problème (10 points) : Contrôle Non Destructif d'un roulement à billes

L'objectif de ce problème est déterminer le spectre permettant de diagnostiquer un défaut d'écaillage sur l'une des bagues d'un roulement à billes (figure 14.106).

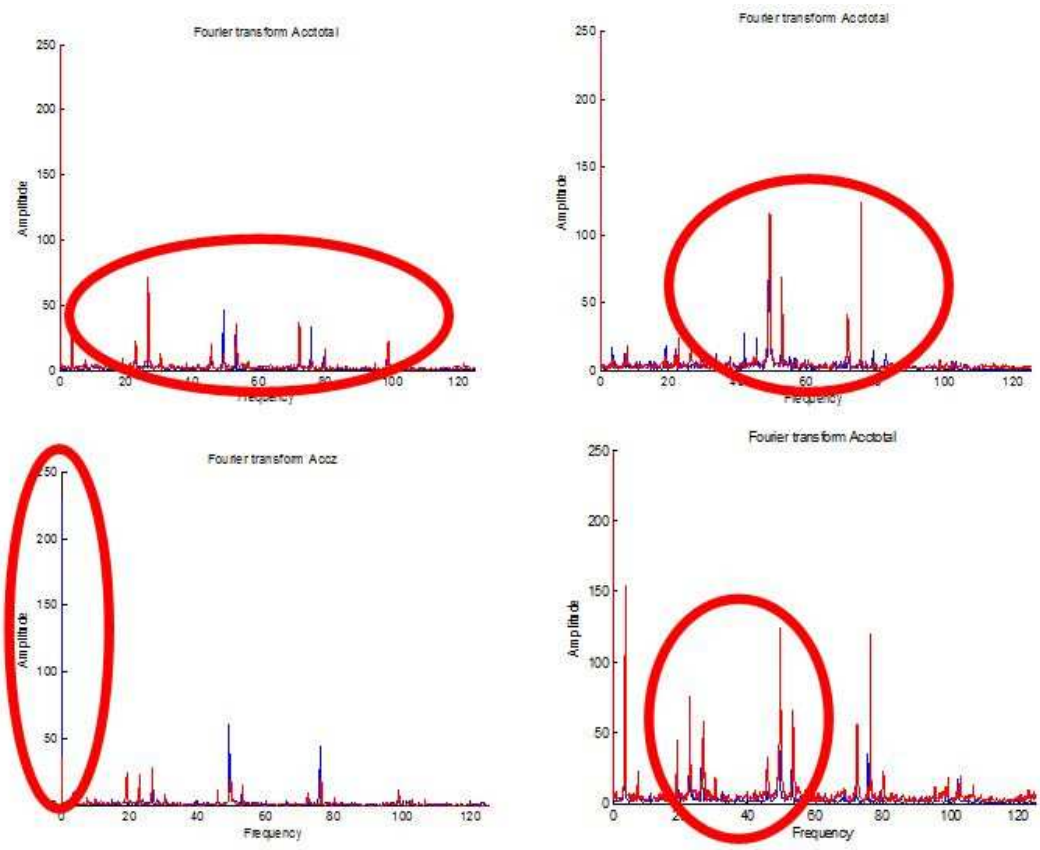


FIGURE 14.106 – *Spectre typique utilisé pour le contrôle non destructif de roulements à billes (d'après http://www.intechopen.com/books/digital-filters-and-signal-processing/)*

En appliquant les équations de la cinématique, on peut montrer que la fréquence de contact entre une bille et un défaut est donné par

$$F^{(ext)} = \frac{1}{2} N F_a \left(1 - \frac{d}{D} \cos \Phi\right), \tag{14.107}$$

pour un défaut sur la bague externe et

$$F^{(int)} = \frac{1}{2} N F_a \left(1 + \frac{d}{D} \cos \Phi\right), \tag{14.108}$$

pour un défaut sur la bague interne ; avec D le diamètre moyen du roulement, d le diamètre des billes,

Φ l'angle de contact des billes sur les pistes, F_a la fréquence de rotation de l'arbre, et N le nombre de billes.

On suppose que le passage d'une bille sur un écaillage est caractérisé par un signal acoustique, qui, mesuré avec un capteur accélérométrique, est donné par la relation suivante :

$$x(t) = \exp(-\lambda t)\sin(2\pi f_0 t)U(t), \tag{14.109}$$

où $U(t)$ est la fonction échelon d'Heaviside, et $f_0 >> F_a$.

Applications numériques : $f_0 = 10$kHz, $F_a = 100$Hz, $F^{(ext)} = 480$Hz, $F^{(int)} = 520$Hz.

1. Calculer la Transformée de Fourier $X(\nu)$ de $x(t)$. Représenter grossièrement son module.
2. On va supposer que la bague externe est fixe et que c'est la bague interne qui tourne. Pour un défaut situé sur la bague externe (donc à une position constante), lorsque l'arbre va tourner à vitesse stabilisée (fréquence de rotation F_a), le signal $x(t)$ va se répéter à la fréquence $F^{(ext)}$, générant ainsi le signal $x_e(t) = \sum_n x(t - \frac{n}{F^{(ext)}})$. Calculer la transformée de Fourier $X_e(\nu)$. Représenter sur la même figure $|X_e(\nu)|$ et $|X(\nu)|$
3. On va supposer maintenant que le défaut est sur la bague interne, donc en mouvement. Lorsque le défaut est situé vers le bas, les billes passent sur lui en étant chargées par le poids de l'arbre. Le signal de défaut sera d'amplitude importante. En revanche, lorsque le défaut est situé vers le haut, le contact bille/défaut se fait sous une charge quasi nulle. En conséquence, le signal de défaut sera d'amplitude faible. A fréquence de rotation F_a constante, le signal mesuré $x(t)$ va donc se reproduire à la fréquence $F^{(int)}$, mais son amplitude sera modulée par un terme périodique de fréquence fondamentale égale à la fréquence de rotation. On supposera que la modulation d'amplitude sera donnée par $A(t) = 1 + \cos(2\pi F_a t)$. Exprimer le signal $x_i(t)$ correspondant, en supposant que celui-ci est observé sur une durée infinie ($n = \infty$).
4. Calculer la Transformée de Fourier $X_i(\nu)$ de $x_i(t)$. Représenter son module.
5. Lister les différences entre les deux représentations fréquentielles qui permettent d'identifier, et de contrôler de façon non destructive, le type de défaut.

Janvier 2016 (4ème Année INSA CVL)

Institut National des Sciences Appliquées
Centre Val de Loire
Département Génie des Systèmes Industriels
Campus de Blois

Examen de Traitement du Signal (TS2)

Lundi 18 janvier 2016
Durée : 2 heures

- Les exercices devront être rédigés sur des copies séparées
- Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté de présentation des résultats et des représentations graphiques
- Document autorisé : 1 feuille A4 recto verso avec notes personnelles, formules et résultats (photocopie formellement interdite)
- Documents interdits : annales et correction de cet examen
- Les téléphones portables et les calculatrices ne sont pas autorisés
- Ce sujet comporte 7 pages

Problème (12 points) : Signaux en présence d'un système non linéaire

Un système non linéaire est un système qui ne vérifie pas le principe de superposition, et qui nécessite une précaution particulière lors de l'utilisation des outils de base du traitement du signal. Néanmoins, pour certains cas particuliers, le calcul des propriétés statistiques des signaux générés par les systèmes non linéaires est abordable. C'est le cas du signal sinusoïdal $s(t) = a\cos(2\pi f_0 t)$ et du bruit gaussien $b(t)$, de puissance σ_b^2.

Nous allons étudier la conséquence de la non-linéarité d'un système aux trois cas très particulier des signaux suivants :

- déterministe (avec un signal sinusoïdal)
- aléatoire (avec un signal gaussien)
- déterministe + aléatoire

Le système non linéaire (SNL) le plus simple que nous pouvons étudier est le quadrateur (Fig.14.107) dont la réponse $y(t)$ à une excitation $x(t)$ est donnée par

$$y(t) = Ax^2(t), \tag{14.110}$$

où A est une constante.

FIGURE 14.107 – Exemple d'un système non linéaire : le quadrateur

Cas d'une excitation sinusoïdale

On applique une entrée sinusoïdale $x(t) = a\cos(2\pi f_0 t)$.

1. Calculer le spectre $X(\nu)$ du signal d'entrée
2. Calculer et tracer le spectre du signal $y(t)$
3. Discuter la nature déterministe ou aléatoire du signal de sortie
4. Identifier le domaine spectral modifié par ce SNL.

Cas d'une excitation aléatoire gaussienne

Calcul du spectre Dans cette partie, on applique un bruit $b(t)$ gaussien centré.

1. Montrer que $E[y(t)] = A\sigma_b^2$
2. En utilisant les résultats liés aux bruit gaussien présentés en Annexe 1, montrer que la fonction d'autocorrélation $\gamma_y(\tau) = \overline{y(t)y(t-\tau)}$ de la sortie s'écrit

$$\gamma_y(\tau) = A^2\left[2\gamma_b^2(\tau) + \sigma_b^4\right]. \tag{14.111}$$

3. En utilisant le Théorème de Wiener-Kintchine, en déduire la densité spectrale de puissance $S_y(\nu)$ du signal de sortie, exprimée en fonction de A, $S_b(\nu)$ et σ_b

Application au cas d'un bruit blanc filtré Considérons que le bruit est filtré par un passe bas idéal de fréquence de coupure f_c).

1. Exprimer la puissance totale $\mathcal{P}$ du bruit dans le domaine spectral. En déduire l'expression de $S_b(\nu)$ en fonction de σ_b et f_c.
2. Représenter graphiquement le spectre $S_y(\nu)$ en indiquant $S_y(0)$

Cas d'une excitation constituée d'une sinusoïde et d'un bruit gaussien

Considérons enfin une entrée du type $z(t) = x(t) + b(t)$ où $x(t)$ et $b(t)$ sont respectivement le signal déterministe et le bruit blanc filtré étudiés précédemment. Afin de déterminer le spectre du signal de sortie, nous devons exprimer la fonction d'autocorrélation $\gamma_y(\tau)$ de la sortie en fonction de moments d'ordre 4 $E[u_i u_j u_k u_l]$ où u représente $x(t)$ ou $b(t)$.

1. En utilisant les annexes 1 et 2, et en supposant que le bruit $b(t)$ et le signal $x(t)$ sont non corrélés, montrer que :
   - $E[2s'b's^2] = 0$,
   - $E[2sbs'^2] = 0$,
   - $E[4ss'bb'] = 2a^2 \cos(2\pi f_0 \tau)\gamma_b(\tau)$,
   - $E[2sbb'^2] = 0$,

   où $b' = b(t-\tau)$ et $s' = s(t-\tau)$.
2. Montrer alors que la fonction d'autocorrélation du signal de sortie s'écrit :

$$\gamma_y(\tau) = A^2 \left[\left(\frac{a^2}{2} + \sigma_b^2 \right)^2 + \frac{a^4}{4} \cos(4\pi f_0 \tau) + 2a^2 \gamma_b(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau) + 2\gamma_b^2(\tau) \right] \tag{14.112}$$

3. En appliquant Wiener-Kintchine, en déduire le spectre et en donner une représentation graphique en supposant $f_c > 2f_0$

Annexe 1 : Propriétés particulières d'un signal Gaussien

Considérons un ensemble de variables aléatoires gaussiennes de moyennes nulles ($E[x_i] = \overline{x_i} = 0$), et de covariance statistique $E[x_i x_j] = \overline{x_i x_j}$. Dans ce cas très particulier de variables gaussiennes, on a les résultats suivants :

- la moyennne du produit de trois variables gaussiennes est nulle, *i.e.*

$$\overline{x_i\ x_j\ x_k} = 0. \tag{14.113}$$

- la moyenne du produit de 4 variables s'exprime en fonction des covariances statistiques, *i.e.*

$$\overline{x_i\, x_j\, x_k\, x_l} = \overline{x_i\, x_j}\;\overline{x_k\, x_l} + \overline{x_i\, x_k}\;\overline{x_j\, x_l} + \overline{x_i\, x_l}\;\overline{x_j\, x_k}. \tag{14.114}$$

Annexe 2 : Moments de signaux sinusoïdaux

Soit deux signaux sinusoïdaux $s = a\cos(\omega_0 t)$ et $s' = a\cos(\omega_0(t-\tau))$. On a les résultats suivant (moyenne temporelle=moyenne statistique) :

$$\overline{s} = \overline{s'} = 0;\;\; \overline{s^2} = \overline{s'^2} = \frac{a^2}{2};\;\; \overline{ss'} = \frac{a^2}{2}\cos(\omega_o\tau). \tag{14.115}$$

$$\overline{s^2 s'^2} = \frac{a^4}{4}[1+\cos(2\omega_o\tau)]. \tag{14.116}$$

Exercice 1 (4 points) : Bruit de quantification

Lors d'un processus de conversion d'un signal analogique $x(t)$ en un signal numérique $x_q(t)$, une erreur systématique est générée et conduit à un bruit de quantification $e(t,s)$ que l'on peut considérer, à un instant t donné, comme étant aléatoire (paramètre s) et supposé suivre une <u>loi uniforme</u> $f_e(s) = Cte$. Deux types de conversions, caractérisées par le pas de quantification q, sont possibles :

- ▲ la conversion par <u>troncature</u> qui consiste à ne garder qu'un certain nombre de chiffres significatifs. Exemple : $\pi = 3.141$ avec 3 chiffres significatifs
- ▼ la conversion par <u>arrondi</u> qui consiste à arrondir au chiffre le plus proche. Exemple : $\pi = 3.14$ avec 2 chiffres significatifs

1. Représenter graphiquement les courbes $x_q(t)$ en fonction de $x(t)$ dans les deux cas de conversion par troncature et par arrondi pour un signal type $x(t)$ représenté par la figure 14.108
2. Exprimer $e(t)$ en fonction de $x_q(t)$ et $x(t)$ sachant que l'on veut $e(t) \geq 0$ pour la conversion par troncature. En déduire le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la variable aléatoire $e(t)$ dans le cas d'une conversion par troncature et dans le cas d'une conversion par arrondi
3. Montrer que l'espérance statistique (valeur moyenne) est différente suivant le mode de conversion choisi. En déduire celle qui présente un biais (composante continue)
4. Calculer la variance statistique σ_e^2 pour les deux types de conversion. En déduire que la puissance $\mathcal{P}_e$ du bruit de quantification est identique quelque soit le mode de conversion choisi et vaut :

$$\mathcal{P}_e = \frac{q^2}{12} \tag{14.117}$$

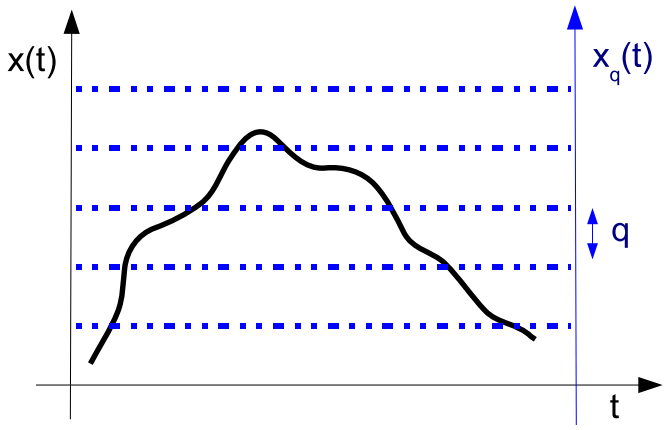


FIGURE 14.108 – *Principe de quantification du signal $x(t)$. La plage de variation du signal est découpée en N intervalles de largeur q afin de générer un signal numérique $x_q(t)$ (non indiqué ici) qui dépend du mode de conversion*

Exercice 2 (4 points) : Filtrage de signal aléatoire gaussien

Soit un signal aléatoire gaussien centré $x(t)$ de loi Normale $\mathcal{N}$ dont la densité spectrale de puissance unilatérale $S_x(f)$ est donnée par la figure Fig.14.109b. Cette densité spectrale possède un comportement basse fréquence de type $1/f$ qui commence à la fréquence f_2 (appelée "corner frequency") et s'étend jusqu'à f_1 liée à la durée totale d'acquisition du signal. Ce signal est échantillonné à l'aide d'un échantillonneur de fréquence d'échantillonnage $f_s = 192$ kHz (f_s : frequency sampling). Afin d'éviter tout repliement de spectre, on place avant l'échantillonneur un filtre anti-repliement ; filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_3 = f_s/2$ (Fig.14.109a). Ce filtre permet de vérifier le critère de Shannon ($f_{max} = f_s/2$).

1. Comment s'appelle le bruit dans l'intervalle $[f_2; f_3]$
2. Calculer la fréquence de coupure basse fréquence que l'on peut avoir dans le spectre $S_x(f)$ du signal audio $x(t)$ enregistré sur $T_1 = 1000$ secondes. On supposera, dans ce cas, que cette valeur permet de fixer f_1
3. Déterminer la fréquence de coupure f_2 appelée "corner frequency" sachant que la densité spectrale de puissance $S_x(f)$ suit une loi en $1/f$: $S_x(f) = C/f$.
4. Calculer la puissance totale $\mathcal{P}_1$ du signal (en V^2) et dans la bande $[f_2; f_3]$. En déduire la probabilité pour que $x(t) > 3\sqrt{96.10^{-3}}$nV=929nV

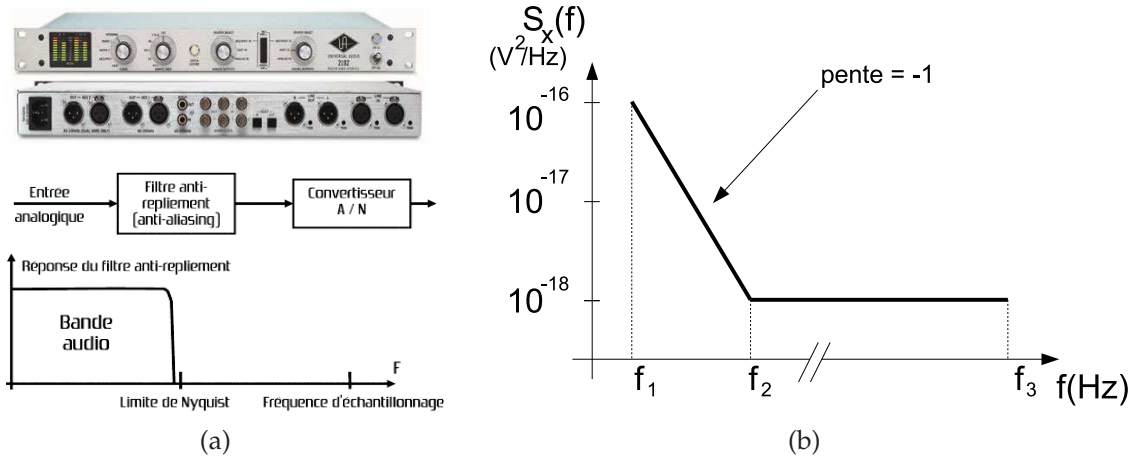


FIGURE 14.109 – *(a) échantillonneur Universal Audio 2192 Ultra-low noise 44.1kHz - 192kHz. (b)Densité spectrale unilatérale $S_x(f)$ du signal aléatoire $x(t)$*

Intégrale $\Pi(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;1)$

ANNEXE 3

$$\Pi(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{et} \quad \Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Biographies

Joseph Fourier (Auxerre, 1768 - Paris, 1830)

FOURIER, l'Auxerrois [2]

Descendant de laboureurs lorrains, les Fourier s'élevèrent peu à peu dans l'échelle sociale et s'établirent artisans, charpentiers, bourreliers et tonneliers. L'un d'entre eux devenu tailleur d'habits arriva à Auxerre et c'est là que naquit le 21 mars 1768 son fils Jean-Joseph dans l'actuelle rue Fourier qui s'appelait alors rue Notre Dame, rappelant la chapelle de Notre-Dame-des-Vertus qui s'élevait sur la place Saint-Etienne, à droite de la cathédrale. Il fut baptisé le jour même en l'église Saint-Régnobert d'Auxerre, aujourd'hui disparue, la paroisse de ce nom comprenait les rues de l'Horloge et de Saint-Regnobert, la place du Marché et la rue Notre-Dame ainsi qu'une partie de la rue Fécauderie et la rue des Cordeliers. Veuf en 1757, son père avait épousé Edmée Germaine Lebègue, dont le cousine Agnès Lebègue épousera l'année suivante Nicolas Restif, connu aujourd'hui comme Restif de la Bretonne qui était né à Sacy et que le sculpteur Brochet a immortalisé pour vous très près de la Tour de l'Horloge mais qui connaît pas mal de vicissitudes. Les naissances sont nombreuses dans la famille Fourier, treize enfants naquirent de cette seconde union et notre Fourier fut le 10ème, 3 garçons étaient né de la première union... mais un grand nombre mourut en bas-âge et la trace des survivants, Joseph Fourier à part, se perdit peu à peu. Joseph Fourier reste orphelin de père et mère à l'âge de 10 ans. Joseph Pallais, organiste de la cathédrale d'Auxerre et qui fut un temps l'ami de Jean-Jacques Rousseau accueille le jeune garçon dans le pensionnat qu'il dirige. Il va alors recevoir les premiers rudiments de Français et de Latin. Fourier avec la protection de l'évêque d'Auxerre, peut-être parce que sa famille était

2. D'après Michel Pauty, Professeur Émérite des Universités, Université de Bourgogne

liée à celle du Bienheureux Pierre Fourier, rentre comme externe au collège militaire d'Auxerre, tenu par les Bénédictins de Saint-Germain depuis 1776, actuellement le Lycée Jacques Amyot, il devient pensionnaire pour quatre ans, le collège deviendra sa famille. L'enseignement est ce que l'on peut appeler de type moderne, la part du latin est réduite par rapport à celle des sciences, on enseigne les langues étrangères, l'allemand en particulier, mais la discipline y est stricte, on se lave à l'eau froide, on sort par tous les temps mais il n'y a pas de châtiments corporels. Il est alors un excellent élève et Arago dans l'éloge historique lu en séance publique de l'Académie des sciences, le 18 novembre 1833 et qu'il a consacré à Fourier écrira : "plusieurs sermons fort applaudis à Paris dans la bouche de hauts dignitaires de l'Église étaient sortis de la plume de l'écolier de douze ans. Il serait impossible de renoncer à ces premières compositions de la jeunesse de Fourier, puisqu'en divulguant le plagiat il eut la discrétion de ne jamais nommer ceux qui en profitèrent". En 1781, il a la vocation pour les mathématiques. Les heures de travail réglementaires ne suffisent plus à sa curiosité... Il est passionné. Il recueille la journée des morceaux de chandelle et la nuit venue dans une salle du collège. A la lueur de ses chandelles, il étudie les ouvrages des grands mathématiciens comme Clairaut (1713-1765) ou Bezout (1730-1783). Très jeune, il achève à Auxerre sa classe de rhétorique (équivalent de notre classe de première) et les Bénédictins l'envoient à Paris au collège Montaigu pour faire une seconde année. A 16 ans et demi il est de retour à Auxerre et il participe à l'enseignement des mathématiques au Collège notamment dans les petites classes. Il commence une recherche personnelle en mathématiques, notamment sur un problème en vogue, celui de la détermination des solutions des équations algébriques. Arrive maintenant le moment de prendre une décision importante, il lui faut choisir une profession. Il souhaite être artilleur ou entrer dans le génie afin de continuer ses études mathématiques mais comme Monge, il n'est pas noble, il ne pourra faire carrière ! Il ne peut ceindre l'épée. Le mathématicien Legendre (1752-1833) intervient au plus haut niveau mais la réponse ministérielle tombe "Fourier n'étant pas noble ne pourrait entrer dans l'artillerie quand il serait un second Newton !" Il sera donc bénédictin et pas loin d'être un second Newton par les applications que ses théories permettront. Il se rend à Saint-Benoît-sur-Loire et le voilà novice et enseignant les mathématiques chez les Bénédictins de l'abbaye de Fleury à Saint-Benoît- sur- Loire. Il va y rester 2 ans et poursuivre ses recherches commencées à Auxerre sur le problème de résolution des équations. Il rédige un mémoire de mathématiques qu'il envoie à divers mathématiciens mais il s'inquiète de ne pas recevoir de réponse, pourtant il est persuadé qu'il apporte des éléments nouveaux au problème de la recherche des solutions d'une équation. 1789, les idées nouvelles apparaissent, il va renoncer à la carrière ecclésiastique sans avoir prononcé de voeux et il quitte l'abbaye de Fleury, le 9 décembre 1789, il lit à l'Académie des Sciences de Paris son premier mémoire qui est apprécié de Monge mais dont le texte semble perdu pour le moment.

Au début de l'année 1790, Fourier est de retour à Auxerre, il a 21 ans et est à nouveau enseignant au collège où il a fait ses études. Les bâtiments se dégradent de façon inquiétante et les enseignants

manquent, car ni l'État, ni la municipalité ne veulent payer les membres du clergé. Le 30 Avril, "l'abbé Fourier" certifie aux officiers municipaux "que par respect du décret de l'Assemblée Nationale du 2 Novembre dernier qui suspend l'émission des voeux, il ne les a pas prononcés le 5 du mois, époque fixée pour sa profession ; que depuis ce temps, appelé par Messieurs les religieux pour professer les Mathématiques et la Rhétorique il est venu dans cette maison où il s'était rendu utile et porte toujours l'habit religieux." Le Principal, Dom Rosman, auquel Fourier gardera toujours son estime, a accepté le contrôle du collège par le Directoire de l'administration départementale et lui a présenté un plan de réformes jugé "sage et savant". Un recentrage des méthodes avec moins de mémoire, plus d'apprentissage et recentrage des contenus, où le latin est allégé au profit des langues étrangères et des Mathématiques. Fourier part à Paris pour présenter son mémoire sur la "résolution des équations numériques de tous les degrés" devant l'Académie des Sciences. A son retour à Auxerre, il embrasse avec enthousiasme les principes de la Révolution. Membre de la Société populaire d'Auxerre, il y exerce un très grand ascendant mais il aura bien du mal à se faire comprendre, en effet, il avait fort à faire, comme de réfuter les utopies d'un astronome qui voulant échapper au "bon plaisir des administrateurs municipaux" voulait que les noms des quartiers du Nord, du Sud, de l'Est et de l'Ouest, assignés aux diverses parties d'Auxerre, le soient par tirage au sort ! ! ! ! Il présente des communications sur Franklin et Newton, mais la société ne dure que deux ans. En 1793, il est membre du Comité de surveillance d'Auxerre composé de 12 patriotes qui doivent établir les listes de suspects, ce travail ne lui plaît pas beaucoup, après un bref passage à Orléans, le revoilà à Auxerre où il redevient enseignant. Il est arrêté, mis en prison à Paris, libéré puis arrêté de nouveau mais la chute de Robespierre vide les prisons et le revoilà à Auxerre. En tout, il resta 5 ans professeur à Auxerre, il enseigna en diverses disciplines littéraires rhétorique, histoire, philosophie puis enfin les mathématiques et la physique.

Paris

Peu après le 9 Thermidor, on veut réorganiser l'enseignement, les professeurs manquent ! On crée les écoles normales. Quinze cents citoyens de tout âge présentés par les chefs-lieux de district s'y retrouvent afin d'apprendre l'art d'enseigner. Fourier est envoyé par Saint Florentin comme élève. On lui enseigne la géométrie descriptive, il est un "élève modèle". Une nouvelle carrière s'ouvre pour lui : il est attaché à l'École Polytechnique avec le titre de "surveillant des leçons de fortifications", puis "chargé du cours d'analyse algébrique". C'est un professeur plein de clarté, de méthode et d'érudition qui n'improvise pas ses cours.

Printemps 1798, l'Expédition d'Egypte

Malgré l'état précaire de l'Europe, en 1798, le Directoire décide de lancer ses troupes en Egypte ! Pour rendre à ce Pays son antique splendeur, il fallait emmener des hommes d'expérience, savants, écrivains, artistes. On crée un "Institut d'Egypte", Monge en est le Président, Bonaparte, le Vice-Président, Fourier le Secrétaire perpétuel. Il publie dans la "Décade" et le "Courrier d'Egypte" un grand

nombre de mémoires concernant l'Egypte, tout en participant avec ses collègues à l'établissement des fabriques d'acier, d'armes, de poudre, de machines de toutes sortes. On trouve au nom de Fourier divers travaux comme : mémoire sur la résolution générale des équations algébriques, des recherches sur les méthodes d'élimination, la démonstration d'un nouveau théorème d'algèbre , un mémoire sur l'analyse indéterminée ; un mémoire sur l'aqueduc qui porte les eaux du Nil au château du Caire ; des recherches sur les oasis et déjà comme nous le verrons plus tard, un plan de recherches statistiques à entreprendre sur l'état de l'Egypte. Il est chargé aussi de nombreuses négociations. Commissaire français auprès du divan du Caire, lorsque Kléber est assassiné en juin 1800, c'est Fourier qui prononce son éloge funèbre, il ne quitte l'Egypte qu'après la capitulation du Général Menou en octobre 1801 et ne fait donc pas partie du retour précipité de Bonaparte. De retour à Toulon le 19 Novembre 1801, Fourier est persuadé qu'il va reprendre son enseignement à l'École Polytechnique il souhaite se consacrer à ses recherches à la fois mathématiques et archéologiques mais Bonaparte va en décider autrement...

1801, retour en France et 1802-1815, préfet de l'Isère

Il ne peut immédiatement rassembler dans une grande publication, tous les documents recueillis par l'expédition, car il est nommé le 2 Janvier 1802, préfet de l'Isère. L'ancien Dauphiné est alors en proie à de nombreuses dissensions politiques, Fourier réussira l'impossible en effectuant un rapprochement entre les différents partenaires. Il reste en place jusqu'en 1815. Cette nomination pour Fourier correspond à une sorte d'exil car Grenoble est à trois journées de Paris par diligence, mais Bonaparte sait depuis l'expédition d'Egypte que Fourier a d'excellentes qualités d'administrateur. Fourier va pourtant poursuivre ses recherches en mathématiques, physique et histoire avec notamment la Rédaction de la Préface historique de la "Description de l'Egypte". Fourier sera attentif à la vie de son département car rien ne va échapper à sa vigilance depuis la réglementation de l'ouverture des cabarets jusqu'à la mise en place d'utiles inventions comme la balance de Fortin ou l'instauration du système métrique. Il va aussi faire adopter et réaliser de grands projets comme la liaison Grenoble-Turin par la route du Lautaret et le Mont Genèvre et aussi l'entreprise de dessèchement des marais de Bourgoin (1500 hectares) qui figurera sur la statue auxerroise comme nous le verrons tout à l'heure. Cette entreprise nécessitera tous ses soins pendant onze années consécutives, il avait écrit à ce sujet "aucune opposition ne peut désormais empêcher ou retarder l'exécution d'un projet aussi utile" dans une lettre adressée aux maires des communes riveraines des marais de Bourgoin, publiée dans les Annales politiques et littéraires du département de l'Isère du 20 avril 1804.

L'Académie des sciences propose en 1811 comme sujet de prix pour 1812 : "Donner la théorie mathématique des lois de la propagation de la chaleur et comparer les résultats de cette théorie à l'expérience". Fourier va alors enrichir son premier manuscrit qui devient un texte de plusieurs centaines de pages. L'exposé est progressif et déductif, comme dans un cours et le 6 décembre 1811, l'Académie rend son verdict : "la commission chargée de l'examen des mémoires qui ont concouru

pour le prix de géométrie relatif à la chaleur, propose de décerner le prix au Mémoire numéro 2". Le président ayant fait l'ouverture du billet cachet joint au mémoire, on y trouve le nom de Joseph Fourier. Laplace, Lagrange, Legendre aperçoivent des difficultés dans la manière d'établir et intégrer les équations différentielles. Les études liées à la chaleur, à sa propagation et à sa transformation se développent difficilement car la nature de la chaleur est mal définie. Au début du XIXe siècle, deux conceptions s'opposent. L'une défendue par Rumford et Laplace présente la chaleur comme une manifestation de l'agitation des particules constitutives des corps. L'autre qui a Lavoisier pour défenseur présente la chaleur comme un fluide particulier : le calorique. Fourier refuse de s'engager dans la bataille.

Théorie de la chaleur : 1816-1822

Fidèle à Napoléon, Fourier sera fait baron puis préfet du Rhône et comte, il n'ose refuser ces promotions. La Seconde Restauration le limoge 3 mai 1815, Louis XVIII prive Fourier de toute fonction officielle et de tout traitement Fourier reste sans emploi dans la capitale, mais M de Chabrol, son ancien élève de l'École Polytechnique, Préfet de Paris, malgré une certaine opposition le nomme au bureau de la Statistique de la Seine . Il publie "Théorie de la chaleur" dans les Annales de chimie et de physique en 1816.

En 1816, deux postes sont libres à l'Académie des Sciences, il postule. Il est élu au second poste mais Louis XVIII refuse de le nommer. L'année suivante une nouvelle désignation doit avoir lieu et Fourier, suivant l'expression d'Arago "Dans notre pays, l'absurde dure peu", entre à l'Académie. Il va alors se consacrer entièrement à la science.

En 1822, Fourier devient secrétaire perpétuel de l'Académie pour la section des Mathématiques et il fait imprimer son ouvrage "La théorie analytique de la chaleur" mais le texte de cet ouvrage différera très peu de celui de 1811. Voici ce qu'écrivait Fourier : "Lorsque la chaleur est inégalement distribuée entre les différents points d'une masse solide, elle tend à se mettre en équilibre et passe lentement des parties qui sont le plus chauffées dans celles qui le sont le moins : en même temps, elle se dissipe par la surface et se perd dans le milieu ou dans le vide. Cette tendance à une distribution uniforme et cette émission spontanée qui s'opère à la surface des corps change continuellement la température des différents points. La question de la propagation de la chaleur consiste à déterminer quelle est la température de chaque point d'un corps à un moment donné".

Éloges académiques et 1816-1830, Les statistiques.

Il prononce les éloges de Delambre, Hershell , Bréguet, Charles, Laplace. L'Académie Française le prendra dans son sein en 1827, elle récompense ainsi le savant et le collaborateur de l'expédition d'Egypte. En 1829 , Fourier fait paraître Recherches statistiques sur la ville de Paris et le département de la Seine avec un Mémoire sur les résulttas moyens et sur les erreurs de mesures, notamment sur la précision de la hauteur de la pyramide de Khéops. Des difficultés cardiaques apparaissent, elles sont

accrues par une chute dans un escalier le 4 mai 1830 et il meurt le 16 mai 1830. Il est enterré au Père Lachaise. Sa tombe proche de celle de son ami Champollion est du style dit égyptien avec le soleil.

Lexique

Anglais	Français
Actuator	Actionneur
Aliasing	Recouvrement de spectre
Analog-to-digital converter	Convertisseur analogique/numérique
Band-pass filter	Filtre passe-bande
Banwidth	Bande passante
Convolution	Convolution
Correlation	Corrélation
Crosscorrelation	lntercorrélation
Data acquisition	Acquisition de données
Digital Signal Processor	Processeur de traitement de signaux
Digital-to-analog converter	Convertisseur numérique/analogique
Fast Fourier Transform	Transformée de Fourier rapide
Filter	Filtre
Plat top window	Fenêtre de pondération à ń toit plat ż
Folding frequency	Fréquence de repliement
Fourier transform	Transformée de Fourier
Frequency	Fréquence
Gaussian law	Loi de Gauss
High-pass filter	Filtre passe-haut
Impulse pulse	Impulsion
Impulse response	Réponse impulsionnelle
Low-pass filter	Filtre passe-bas
Matched filter	Filtrage adapté
Mean	Moyenne
Noise	Bruit
Oversampling	Sur-échantillonnage
Phase lock loop (PLL)	Boucle à verrouillage de phase
Power spectrum	Spectre en puissance
Ramp signal	Signal de rampe
Real time operating system	Système d'exploitation temps réel
RMS value (RMS : root mean square)	Valeur efficace
Sample and Hold	Echantillonneur/Bloqueur
Sampling	Echantillonnage
Sawtooth signal	Signal en ń dent de scie ż
Sensor	Capteur
Shielded Twisted Pair	Paire torsadée blindée
Shot noise	Bruit de grenaille
Signal	Signal
Signal processing	Traitement du signal
Signal to noise ratio	Rapport signal sur bruit
Smoothing window	Fenêtre de lissage ou de pondération
Standard deviation	Écart type
Statistical distribution	Distribution statistique
Variance	Variance
Voltage controlled oscillator (V CO)	Oscillateur à fréquence commandée
White noise	Bruit blanc
Window	Fenêtre temporelle (traitement du signal)
Windowing	Fenêtrage
Wire	Fil
Accuracy	Exactitude
Correction	Correction
Drift	Derive
Dynamic Range	Gamme Dynamique
Error	Erreur
Random Error	Erreur Aleatoire
Systematic Error	Erreur Systematique
Influence Quantity	Grandeur dŠInfluence
Instrument	Instrument
Linear Coupling Factors	Facteurs de Couplage Lineaire
Measurand	Mesurande
Measurement	Mesurage
Measurement Device	Moyen de Mesure
Measurement Method	Methode de Mesure
Measurement System	Systeme de Mesure
Noise	Bruit
Non Linearity	Non Linearité

Bibliographie

[1] N. Amine, F. Régis, *Traitement du signal et de l'Šimage pour la biométrie* (Lavoisier, 2012), ISBN 9782746288997, https://books.google.fr/books?id=SI29AgAAQBAJ

[2] M. Bellanger, *Traitement numérique du signal - 9e éd.*, Sciences de l'ingénieur (Dunod, 2012), ISBN 9782100588640, https://books.google.fr/books?id=3Y9qGxc-m68C

[3] M. Benidir, *Théorie et traitement du signal : Cours et exercices corrigés. Méthodes de base pour l'analyse et le traitement du signal*, Sciences SUP. Sciences de l'ingénieur. Cours et exercices corrigés (Dunod, 2004), ISBN 9782100059850, https://books.google.fr/books?id=uEM7AAAACAAJ

[4] M. Bergounioux, *Mathématiques pour le traitement du signal - 2e éd. : Cours et exercices corrigés*, Mathématiques appliquées pour le Master/SMAI (Dunod, 2014), ISBN 9782100714568, https://books.google.fr/books?id=WeWmAwAAQBAJ

[5] R. Cariou, *Le traitement du signal radar : détection et interprétation de l'écho radar*, Collection Technique & ingénierie, Électronique (Dunod, 2012), ISBN 9782100577972, https://books.google.fr/books?id=4JmCMAEACAAJ

[6] T. Chonavel, *Traitement du signal aléatoire*, Collection technique et scientifique des télécommunications (Springer, 2000), ISBN 9782287596988, https://books.google.fr/books?id=dBbwPAAACAAJ

[7] F. Cottet, *Traitement des signaux et acquisition de données - 3ème édition*, Sciences Sup (Dunod, 2009), ISBN 9782100539857, https://books.google.fr/books?id=mChYZgvldSgC

[8] F. Cottet, *Aide-Mémoire de traitement du signal*, Sciences de l'ingénieur (Dunod, 2006), ISBN 9782100528516, https://books.google.fr/books?id=PwOadUgv8eQC

[9] P. Courmontagne, *Ingénierie du signal : théorie et pratique*, Technosup (Paris) (Ellipses, 2005), ISBN 9782729822897, https://books.google.fr/books?id=3dzSAAAACAAJ

[10] Y. Deville, *Traitement du signal - Signaux temporels et spatiotemporels : Analyse des signaux, théorie de l information, traitement d antenne, séparation aveugle de sources*, TECHNOSUP : les filières technologiques des enseignements supérieurs (Ellipses Marketing, 2011), ISBN 9782729870799, https://books.google.fr/books?id=oQiQtgAACAAJ

[11] H. Egon, M. Marie, P. Porée, *Traitement du signal et automatique : Asservissements linéaires échantillonnés et représentation d'état. II*, Collection Méthodes (Hermann, 2001), ISBN 9782705664145, https://books.google.fr/books?id=tVsXAAAACAAJ

[12] S. Kia, *Méthodes avancées de traitement du signal pour la détection de défauts électriques et mécaniques dans les machines à induction : Application aux systèmes de traction ferroviaire* (2009), https://books.google.fr/books?id=1kOnXwAACAAJ

[13] K. Kpalma, V. Haese-Coat, *Traitement numérique du signal : théorie et applications*, Technosup (Paris) (Ellipses, 2003), ISBN 9782729817282, `https://books.google.fr/books?id=LQswAAAACAAJ`

[14] S. Mallat, *Une exploration des signaux en ondelettes* (Éd. de l'École Polytechnique, 2000), ISBN 9782730207331, `https://books.google.fr/books?id=sQ723znMldMC`

[15] J. Mari, F. Glangeaud, F. Coppens, *Traitement du signal pour géologues et géophysiciens : Prospection sismique*, Publications de l'Institut français du pétrole (Editions Technip, 2001), ISBN 9782710807865, `https://books.google.fr/books?id=lnKizVK45gcC`

[16] L. Millot, *Traitement du signal audiovisuel : applications avec Pure Data*, Audio-Photo-Vidéo (Dunod, 2008), ISBN 9782100506880, `https://books.google.fr/books?id=BPRoNwAACAAJ`

[17] K. Minaoui, *Séquences binaires et traitements du signal* (2010), `https://books.google.fr/books?id=HSkpuAAACAAJ`

[18] Y. Mori, *Électronique pour le traitement du signal : Filtrage numérique*, Number vol. 6 in Électronique pour le traitement du signal (Hermes Science Publications, 2007), ISBN 9782746213449, `https://books.google.fr/books?id=xYhWNwAACAAJ`

[19] D. Muti, *Traitement du Signal Tensoriel, application aux images en couleurs et aux signaux sismiques bruités* (2004), `https://books.google.fr/books?id=2Pr4OwAACAAJ`

[20] M. Najim, *Modélisation, estimation et filtrage optimal en traitement du signal*, Collection Traitement du signal et de l'image (Hermes Science Publications, 2006), ISBN 9782746214996, `https://books.google.fr/books?id=cWzXGAAACAAJ`

[21] A. Quinquis, *Le traitement du signal sous Matlab : Pratique et applications*, Collection "Traitement du signal" (Hermes Science Publications, 2007), ISBN 9782746216457, `https://books.google.fr/books?id=enn3PQAACAAJ`

[22] J. Tanguy, *Théorie et pratique du signal : Signaux déterministes et aléatoires en continu et en discret*, Technosup (Paris) (Ellipses, 2007), ISBN 9782729832629, `https://books.google.fr/books?id=tMPcGAAACAAJ`

[23] E. Tatulli, *Traitement du signal en interférométrie monomode dans le cadre du projet AMBER : application à l'observation interférométrique de l'environnement circumstellaire des étoiles jeunes* (2004), `https://books.google.fr/books?id=bVkBYAAACAAJ`

Ce support de cours est disponible sur les sites suivants :
http://www.univ-tours.fr/m-dos-santos-serge-204687.kjsp?RH=ACCUEIL_FR
https://celene.insa-cvl.fr/pluginfile.php/2200/mod_resource/content/1/cours_TS_2016_GSI_INSACVL.pdf
ou en flashant ce QR-code